CONCOURS COMMUN 2008

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Premier problème

Etude d'une inégalité

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $a = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|a| = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 = x^2 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{C},\ |a| = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+.}$$

2. Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}),$$

et donc

$$(|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = (|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|) - (|z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})) = 2|z||\overline{w}| - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 2(|z||\overline{w}| - \mathrm{Re}(z\overline{w})).$$

$$\boxed{\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2,\ (|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = 2(|z||\overline{w}| - \mathrm{Re}(z\overline{w})).}$$

3. Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On sait que pour tout complexe Z, on a $|Z| \geq \mathrm{Re}Z$ et donc

$$(|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = 2(|z||\overline{w}| - \mathrm{Re}(z\overline{w})) \geq 0.$$

On en déduit $(|z| + |w|)^2 \geq |z+w|^2$ puis que $|z+w| \leq |z| + |w|$. De plus,

$$|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow (|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = 0 \Leftrightarrow |z||\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w}) \Leftrightarrow z\overline{w} \in \mathbb{R}^+.$$

Si $w = 0$, on a l'égalité et si $w \neq 0$, alors $|w|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et donc

$$|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z\overline{w} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z\frac{|w|^2}{w} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+/\ z = \lambda w.$$

En résumé, on a l'égalité si et seulement si $w = 0$ ou $w \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+/\ z = \lambda w$ ou encore si et seulement si z et w sont les affixes de deux points situés sur une même droite issue de l'origine.

La notion de $(p\ :\ q)$ point

4. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z-a}{b-z} = \frac{p}{q} &\Leftrightarrow q(z-a) = p(b-z) \text{ et } z - b \neq 0 \\
&\Leftrightarrow q(z-a) = p(b-z) \text{ (car } b \text{ n'est pas solution de l'équation } q(z-a) = p(z-b) \text{ puisque } a \neq b) \\
&\Leftrightarrow z = \frac{qa + pb}{p+q}.
\end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de z. De plus, z est l'affixe du barycentre du système $(A(q), B(p))$.

$$\boxed{\text{Le } (p\ :\ q) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est } \mathrm{bar}(A(q), B(p)).}$$

5. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Le barycentre du système $\text{bar}(A(\alpha q), B(\alpha p))$ est le barycentre du système $\text{bar}(A(q), B(p))$ ou encore

$$\boxed{\text{le } (\alpha p \ : \ /alphaq) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est le } (p \ : \ q) \text{ point de } A \text{ à } B.}$$

6. Le $(1 \ : \ 1)$ point de A à B est l'isobarycentre des points A et B ou encore le milieu du segment $[AB]$.

7. On a $X = \text{bar}(A(q), B(p))$ et $Y = \text{bar}(A(q), C(p))$. Déjà, $X \in]AB[$ et $Y \in]AC[$ et en particulier $X \neq Y$. Puis $\overrightarrow{AX} = \dfrac{p}{p+q}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AY} = \dfrac{p}{p+q}\overrightarrow{AC}$ et donc

$$\overrightarrow{XY} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{BC}.$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite } (XY) \text{ est parallèle à la droite } (BC).}$$

La notion de $(p \ : \ q)$ sous-triangle

8. Soit G l'isobarycentre du triangle $\Delta(ABC)$. On sait que $z_G = \dfrac{a+b+c}{3}$.

9. Notons G' l'isobarycentre du triangle $(A'B'C')$.

$$z_{G'} = \frac{a'+b'+c'}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{qa+pb}{p+q} + \frac{qb+pc}{p+q} + \frac{qc+pa}{p+q}\right) = \frac{1}{3}\frac{(p+q)a+(p+q)b+(p+q)c}{p+q} = \frac{a+b+c}{3} = z_G.$$

Par suite,

$$\boxed{\text{le } (p \ : \ q) \text{ sous-triangle du triangle } \Delta(ABC) \text{ a le même isobarycentre que } \Delta(ABC).}$$

Etude de suites

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $a_{k+1} = \dfrac{1}{p+q}(qa_k + pb_k)$, $b_{k+1} = \dfrac{1}{p+q}(qb_k + pc_k)$ et $c_{k+1} = \dfrac{1}{p+q}(qc_k + pa_k)$ ce qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

11. La question 9. montre déjà que pour $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k+1} = 3\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}+c_{k+1}}{3} = 3\dfrac{a_k+b_k+c_k}{3} = \alpha_k$. Ainsi, la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\beta_{k+1} = a_{k+1} + jb_{k+1} + j^2c_{k+1} &= \frac{1}{p+q}((qa_k+pb_k) + j(qb_k+pc_k) + j^2(qc_k+pa_k)) \\ &= \frac{1}{p+q}((q+j^2p)a_k + (jq+p)b_k + (jq+j^2p)c_k) = \frac{q+j^2p}{p+q}(a_k+jb_k+j^2c_k) = \frac{q+j^2p}{p+q}\beta_k,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} = a_{k+1} + j^2b_{k+1} + jc_{k+1} &= \frac{1}{p+q}((qa_k+pb_k) + j^2(qb_k+pc_k) + j(qc_k+pa_k)) \\ &= \frac{1}{p+q}((q+jp)a_k + (j^2q+p)b_k + (jq+j^2p)c_k) = \frac{q+jp}{p+q}(a_k+j^2b_k+jc_k) = \frac{q+jp}{p+q}\gamma_k.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les suites } (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sont géométriques de raison } 1,\ \frac{q+j^2p}{p+q} \text{ et } \frac{q+jp}{p+q} \text{ respectivement.}}$$

Maintenant, $\left|\dfrac{q+j^2p}{p+q}\right| = \dfrac{|q+j^2p|}{p+q} \leq \dfrac{q+|j^2|q}{p+q} = \dfrac{q+p}{p+q} = 1$ et de plus, comme les points d'affixe q et j^2p ne sont pas sur une même demi-droite d'origine O (puisque j^2p n'est pas un réel positif), l'inégalité précédente est une inégalité stricte. De même, $\left|\dfrac{q+jp}{p+q}\right| < 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha_0 = a_0+b_0+c_0$ et que $\lim\limits_{k\to+\infty} \beta_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$.

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = a_0+b_0+c_0 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \beta_k = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0.}$$

12. Si on pose $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$, on a

$$C = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,3} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,3} & b_{3,2} \end{pmatrix},$$

ou encore la matrice C est la matrice obtenue à partir de la matrice B en échangeant ses deuxième et troisième colonnes.

13.

$$\begin{aligned}
\det(V) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= \begin{vmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \ \text{(en développant suivant la première colonne)} \\
&= (j-1)^2 - (j^2-1)^2 = j^2 - 2j + 1 - j^4 + 2j^2 - 1 = 3j^2 - 3j \ (\text{car } j^4 = j) \\
&= 3j(j-1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(V) = 3j(j-1).}$$

En particulier, $\det(V) \neq 0$ et donc V est inversible. Ensuite, puisque $1+j+j^2 = 0$,

$$V^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3Q.$$

Maintenant, la question 12. ou un calcul par bloc montre que $Q^2 = I_3$ ou encore $Q^{-1} = Q$. De $V^2 = 3Q$, on tire $V^{-1}V^{-1} = V^{-2} = \dfrac{1}{3}Q^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$ puis $V^{-1} = \dfrac{1}{3}VQ$.

$$\boxed{V^{-1} = \frac{1}{3}VQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.}$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha_k+\beta_k+\gamma_k \\ \alpha_k+j^2\beta_k+j\gamma_k \\ \alpha_k+j\beta_k+j^2\gamma_k \end{pmatrix},$$

et la question 11. montre que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} c_k = \frac{a_0+b_0+c_0}{3}.}$$

Etude d'une application linéaire

15. Soient $(M, N) \in (\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = V^{-1}(\lambda M + \mu N)V = \lambda V^{-1}MV + \mu V^{-1}NV = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N).$$

Donc

$$\boxed{\varphi \in L(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})).}$$

Soit $(M, N) \in (\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))^2$.

$$\varphi(M)\varphi(N) = V^{-1}MVV^{-1}NV = V^{-1}MNV = \varphi(MN).$$

$$\boxed{\forall (M, N) \in (\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))^2,\ \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N).}$$

16. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

$$\psi \circ \varphi(M) = V(V^{-1}MV)V^{-1} = (VV^{-1})M(VV^{-1}) = M.$$

Par suite, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}$. Ainsi, l'endomorphisme φ est inversible à gauche d'inverse à gauche ψ.
Puisque $\dim(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})) < +\infty$, on sait que φ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ et que $\varphi^{-1} = \psi$.

$$\boxed{\varphi \in GL(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})) \text{ et } \varphi^{-1} = \psi.}$$

17.

$$A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q & p & 0\\0 & q & p\\p & 0 & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}p+q\\p+q\\p+q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q & p & 0\\0 & q & p\\p & 0 & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q+jp\\jq+j^2p\\j^2q+p\end{pmatrix} = \frac{q+jp}{p+q}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix},$$

puis en conjuguant $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix} = \dfrac{q+j^2p}{p+q}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$.

18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est $A_{(p,q)}$ et soit (e_1, e_2, e_3) la famille de trois vecteurs de matrice V dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
Puisque V est inversible, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
La question précédente fournit $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = \dfrac{q+jp}{p+q}e_2$ et $f(e_3) = \dfrac{q+j^2p}{p+q}e_3$. La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc la matrice $D = \mathrm{diag}\left(1, \dfrac{q+jp}{p+q}, \dfrac{q+j^2p}{p+q}\right)$. La formule de changement de bases fournit alors $V^{-1}A_{(p,q)}V = D$ ou encore

$$\boxed{\varphi(A_{(p,q)}) = D \text{ où } D = \mathrm{diag}\left(1, \frac{q+jp}{p+q}, \frac{q+j^2p}{p+q}\right).}$$

19. Soient $(p, q, p', q') \in (]0, +\infty[)^4$ puis D et D' les matrices diagonales telles que $\varphi(A_{(p,q)} = D$ et $\varphi(A_{(p,q)} = D'$. D'après la question 15.,

$$\varphi(A_{(p,q)}A_{(p',q')}) = \varphi(A_{(p,q)})\varphi(A_{(p',q')}) = DD' = D'D = \varphi(A_{(p',q')})\varphi(A_{(p,q)}) = \varphi(A_{(p',q')}A_{(p,q)}).$$

Maintenant, φ est bijective d'après la question 16. et on en déduit que $A_{(p,q)}A_{(p',q')} = A_{(p',q')}A_{(p,q)}$.

$$\boxed{\text{Deux matrices quelconques de l'ensemble } \{A_{(p,q)} /\ (p, q) \in]0, +\infty[^2\} \text{ commutent.}}$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\varphi(A_{(1,k)}) = D_{(1,k)}$.

$$\begin{aligned}\varphi(A_{(1,n)} \dots A_{(1,2)}A_{(1,1)}) &= \varphi(A_{(1,n)}) \dots \varphi(A_{(1,2)})\varphi(A_{(1,1)}) = D_{(1,n)} \dots D_{(1,2)}D_{(1,1)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \text{diag}\left(1, \frac{k+j}{k+1}, \frac{k+j^2}{k+1}\right) = \text{diag}\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right),\end{aligned}$$

et donc

$$A_{(1,n)} \dots A_{(1,2)}A_{(1,1)} = \psi\left(\text{diag}\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right)\right) = V\text{diag}\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right)V^{-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{(1,n)} \dots A_{(1,2)}A_{(1,1)} = VD_nV^{-1} \text{ où } D_n = \text{diag}\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis par l'énoncé

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right| = \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\left(1 + \frac{j}{k}\right)\right| = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{k=1}^{n} \left|1 + \frac{j}{k}\right| = \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n} \left|1 + \frac{j}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n+1},$$

et puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+j}{k+1} = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+j^2}{k+1} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1} = 0.}$$

Deuxième problème

Etude d'une fonction

21. f est bien définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $f(x)=e^{\ln x/x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ et donc $f(x)$ tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 et donc $f(x)$ tend vers 1. La courbe représentative de f admet ainsi les droites d'équation $x=0$ et $y=1$ pour droites asymptotes.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}e^{\ln x/x}=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{1/x}.$$

Sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. Par suite, f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. En particulier, f admet un maximum en e et ce maximum vaut $f(e)=e^{1/e}$.

22. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

23. Soit $x>0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{\ln x/x}}{x}=e^{(-1+\frac{1}{x})\ln x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}(-1+\dfrac{1}{x})\ln x=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0.}$$

24. f est continue et strictement croissante sur $]0,e]$. f réalise donc une bijection de $]0,e]$ sur $]f(0^+),f(e)]=]0,e^{1/e}]$. On note f^{-1} la réciproque de cette bijection.

25. f est continue sur $]0,e]$ et donc f^{-1} est continue sur $]0,e^{1/e}]$. f est dérivable sur $]0,e[$ et f' ne s'annule pas sur $]0,e[$. Par suite, f^{-1} est dérivable sur $]0,e^{1/e}[$. Mais $f'(e)=0$ et donc f^{-1} n'est pas dérivable en $f(e)=e^{1/e}$.

$$\boxed{f^{-1} \text{ est continue sur }]0,e^{1/e}], \text{ dérivable sur }]0,e^{1/e}[\text{ mais non dérivable en } e^{1/e}.}$$

Etude d'une suite

26. Pour tout réel t, $\Phi_1(t)=1^t=1$ et donc $\forall n\in\mathbb{N},\ t_n=1$. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=1$.

27. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction Φ_x est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en le réel $h(x)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $t_{n+1}=\Phi_x(t_n)$, on obtient $h(x)=\Phi_x(h(x))$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\Phi_x(h(x)).}$$

En particulier, pour tout réel x, on a $h(x)>0$ et $h(x)=x^{h(x)}$. Mais alors $f(h(x))=h(x)^{1/h(x)}=(x^{h(x)})^{1/h(x)}=x$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(h(x))=x.}$$

28. Soit $x>1$. Φ_x est la fonction exponentielle de base x et puisque $x>1$, on sait que Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

29. Soit $x>1$. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n<t_{n+1}$.

- $t_1=\Phi_x(t_0)=x^1=x>1=t_0$ et l'inégalité est donc vraie quand $n=0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $t_n<t_{n+1}$. Puisque la fonction Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{n+1}=\Phi_x(t_n)<\Phi_x(t_{n+1})=t_{n+2}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

$$\boxed{\text{si } x > 1, \text{ la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

30. Soit $x \in]1, e^{1/e}]$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq e$.

- $t_0 = 1 \leq e$ et l'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $t_n \leq e$. Puisque la fonction Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{n+1} = \Phi_x(t_n) < \Phi_x(e) = x^e \leq (e^{1/e})^e = e.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq e$. Mais alors, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par e. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

$$\boxed{\text{si } x \in]1, e^{1/e}], \text{ la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

31. Soit $x \in]e^{1/e}, +\infty[$. Supposons par l'absurde que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'après la question 27., le réel $h(x)$ vérifie $f(h(x)) = x$. Mais alors $x \in f(]0, +\infty[)$ et d'après la question 21., $x \leq e^{1/e}$. Ceci est une contradiction et donc la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Plus précisément, puisque la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

$$\boxed{\text{si } x \in]e^{1/e}, +\infty[, \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty.}$$

32. Soit $x \in]0, 1[$. Φ_x est la fonction exponentielle de base x avec $x < 1$ et dans ce cas, la fonction Φ_x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

33. Soit $x \in]0, 1[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

- $t_1 = x < 1 = t_0$ et l'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $t_{2n+1} < t_{2n}$. Puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{2n+3} = \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n+1}) < \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}) = t_{2n+2}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_{2n+1} < t_{2n}.}$$

34. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\text{sgn}(t_{2n+4} - t_{2n+2}) = \text{sgn}(\Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n+2} - \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n})) = \text{sgn}(t_{2n+2} - t_{2n}).$$

Ceci montre que la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus,

$$t_2 = \Phi_x \circ \Phi_x(t_0) = x^{(x^1)} = e^{x \ln x} < 1 = t_0 \text{ car } x \in]0, 1[,$$

et la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $t_{2n} > t_{2n+2}$. Puisque la fonction Φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduite que $t_{2n+1} = \Phi_x(t_{2n}) < \Phi_x(t_{2n+2}) = t_{2n+3}$ et donc la suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$\boxed{\text{La suite } (t_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et la suite } (t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

35. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_1 \leq t_{2n+1} \leq t_{2n} \leq t_0$. Mais alors, la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par t_1 et de même, la suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par t_0. On en déduit que les deux suites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Les deux suites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \Phi_x \circ \Phi_x(u_n) \quad (*)$. Soit ℓ la limite d'une telle suite. Par continuité de la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$ et donc en ℓ, quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $\ell = \Phi_x \circ \Phi_x(\ell)$ et donc ℓ est un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $t_n = \Phi_x(t_{n-1}) \in [0, 1]$ et donc les limites des suites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0, 1]$.

Détermination des points fixes

36. Soit $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[$. Alors, $-1 \leq \ln x < 0$ puis $0 < (\ln x)^2 \leq 1$ et donc

$$g'(0) = (\ln x)^2 x - 1 \leq x - 1 < 0.$$

Mais alors, puisque la fonction g' est décroissante sur $[0,1]$ et que $g'(0) < 0$, la fonction g' est strictement négative sur $[0,1]$ et donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$. En particulier, l'équation $g(t) = 0$ a au plus une solution dans $[0,1]$ ou encore la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ a au plus un point fixe et donc exactement un point fixe dans $[0,1]$ ($\Phi_x \circ \Phi_x$ a au moins un point fixe dans $[0,1]$ puisque la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tel point).

On en déduit que les suites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. On sait alors que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\boxed{\text{Si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[\text{, la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

37. Soit $x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right[$. Alors, $-e \leq \ln x < -1$ puis $1 \geq -\frac{1}{e}\ln x > \frac{1}{e}$ et finalement $\beta = -\frac{1}{e}\ln x - 1 \leq 0$. La fonction g' est donc négative sur $[0,1]$ et même strictement négative sur $[0,1]\setminus\{\alpha\}$. La fonction g est de nouveau strictement décroissante sur $[0,1]$ et comme à la question précédente

$$\boxed{\text{Si } x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right[\text{, la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

38. D'après le résultat admis au début de la page 4, $g'(p) = (\ln x)^2 \Phi_x(p)(\Phi_x \circ \Phi_x)(p) - 1 = (\ln x)^2 \times p \times p - 1 = (p \ln x)^2 - 1$. Mais l'égalité $\Phi_x(p) = p$ fournit $x^p = p$ et donc $p \ln x = \ln p$. Finalement, $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$.

Puisque $p < \frac{1}{e}$, on a $\ln p < -1$ puis $(\ln p)^2 > 1$ et finalement $g'(p) > 0$. Le tableau de variations de g montre alors que $\gamma < p < \delta$.
Puisque g est strictement croissante sur $[\gamma, \delta]$, l'équation $g(t) = 0$ admet exactement une solution dans $[\gamma, \delta]$ à savoir p.
D'autre part, $g(0) \times g(\gamma) = x \times g(\gamma) < 0$ et puisque g est continue et strictement croissante sur $[0, \gamma]$. L'équation $g(t) = 0$ admet une et une seule solution p_1 dans $[0, \gamma]$ telle que $0 < p_1 < \gamma$.
Enfin, $g(1) = x^x - 1 < 0$ car $x < 1$ et $g(\delta) > 0$. Puisque de plus g est continue et strictement décroissante sur $[\delta, 1]$, l'équation $g(t) = 0$ admet une et une seule solution p_2 dans $[\delta, 1]$ telle que $\delta < p_2 < 1$.

En résumé, l'équation $g(t) = 0$ admet trois solutions p_1, p et p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$ ou encore

$$\boxed{\Phi_x \circ \Phi_x \text{ possède trois points fixes } p_1, p \text{ et } p_2 \text{ vérifiant } 0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1.}$$

39. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_2 \leq t_{2n}$.

- $t_0 = 1 > p_2$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_2 \leq t_{2n}$. Alors puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $p_2 = \Phi_x \circ \Phi_x(p_2) \leq \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}) = t_{2n+2}$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_2 \leq t_{2n}$.

Mais alors, la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ (d'après la question 35.) qui est élément de $[p_2, 1]$. Cette limite ne peut être que p_2 et donc

$$\boxed{\text{Si } x \in]0, e^{-e}[\text{, la suite } (t_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } p_2.}$$

40. Supposons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $t_{2n_0+1} > p$. Puisque la fonction ϕ_x est décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $t_{2n_0+2} = \Phi_x(t_{2n_0+1}) \leq \Phi_x(p) = p$. Ceci contredit le résultat de la question précédente et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} \leq p$.
La suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers p_1 ou p. Mais alors les suites extraites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes. On en déduit que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0, e^{-e}[\text{, la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$$

