CONCOURS COMMUN 2008

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

PREMIER PROBLÈME

Partie A - Etude de φ_1

1. Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Posons $P = \alpha X + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_1(P) = \alpha(X-a)(X-b) - (X - \frac{a+b}{2})(\alpha X + \beta) = -(\alpha\frac{a+b}{2} + \beta)X + \alpha ab + \beta\frac{a+b}{2}.$$

Ceci montre que $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Par suite, φ_1 est une application de $\mathbb{R}_1[X]$ dans lui-même.

Soient alors $(P, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X-a)(X-b)(\lambda P' + \mu Q') - (X - \frac{a+b}{2})(\lambda P + \mu Q)\\ &= \lambda\left((X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P\right) + \mu\left((X-a)(X-b)Q' - (X-\frac{a+b}{2})Q\right) = \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_1(Q),\end{aligned}$$

et on a montré que

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_1[X].}$$

2. $\varphi_1(1) = \frac{a+b}{2} - X$ et $\varphi_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$. Par suite,

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.}$$

3. $\det(M_1) = -\frac{(a+b)^2}{4} + ab = -\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4}$. Par suite,

$$\varphi_1 \text{ bijective} \Leftrightarrow \det M_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b.$$

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective si et seulement si } a \neq b.}$$

4. (a) $\mathcal{B}$ est une famille de deux éléments de $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2. Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 0 &\Rightarrow (\lambda+\mu)X - (a\lambda + b\mu) = 0\\ &\Rightarrow \begin{cases}\lambda + \mu = 0\\ a\lambda + b\mu = 0\end{cases} \text{ (car la famille } (1, X) \text{ est libre}\\ &\Rightarrow \begin{cases}\mu = -\lambda\\ (a-b)\lambda = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 = \mu \text{ (car } a \neq b).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre et finalement

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

(b) $\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - (X-a)(X - \dfrac{a+b}{2}) = (-b + \dfrac{a+b}{2})(X-a) = \dfrac{a-b}{2}(X-a)$ et en échangeant les rôles de a et b, $\varphi_1(X-b) = \dfrac{b-a}{2}(X-b)$. Par suite,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right).}$$

(c) Immédiatement

$$\boxed{P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Ensuite, on sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$. Or l'inverse de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}.}$$

(d) Les formules de changement de bases fournissent

$$\boxed{M_1 = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} M P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}.}$$

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $M^p = \left(\operatorname{diag}(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2})\right)^p = \operatorname{diag}(\dfrac{(a-b)^p}{2^p}, \dfrac{(b-a)^p}{2^p})$ puis

$$\begin{aligned}
M_1^p &= P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{(a-b)^p}{2^p} & 0 \\ 0 & \dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a\dfrac{(a-b)^p}{2^p} & -b\dfrac{(b-a)^p}{2^p} \\ \dfrac{(a-b)^p}{2^p} & \dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a\dfrac{(a-b)^p}{2^p} + b\dfrac{(b-a)^p}{2^p} & ab(-\dfrac{(a-b)^p}{2^p} + \dfrac{(b-a)^p}{2^p}) \\ \dfrac{(a-b)^p}{2^p} - \dfrac{(b-a)^p}{2^p} & b\dfrac{(a-b)^p}{2^p} - a\dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p}\begin{pmatrix} b-(-1)^p a & ab(1-(-1)^p) \\ -1+(-1)^p & -a+(-1)^p b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ M_1^p = \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p}\begin{pmatrix} b-(-1)^p a & ab(1-(-1)^p) \\ -1+(-1)^p & -a+(-1)^p b \end{pmatrix}.}$$

5. (a) $\Gamma = \operatorname{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3)$ et donc

$$\boxed{\Gamma \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).}$$

(b) D'après la question 4.(e), $M_1^2 = \dfrac{b-a}{4}\begin{pmatrix} b-a & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \dfrac{(b-a)^2}{4}I_2$ puis $M_1^3 = M_1^2 M_1 = \dfrac{(b-a)^2}{4}M_1$.

$$\boxed{M_1^2 = \frac{(b-a)^2}{4}I_2 \text{ et } M_1^3 = \frac{(b-a)^2}{4}M_1.}$$

(c) On en déduit que $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3) = \text{Vect}(I_2, M_1)$. D'autre part, $M_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\dfrac{a+b}{2} \end{pmatrix}$ et en particulier, M_1 n'est pas une matrice scalaire ($m_{2,1} = -1 \neq 0$). On en déduit que la famille (I_2, M_1) est libre et donc est une base de Γ.

$$\boxed{\text{La famille } (I_2, M_1) \text{ est une base de } \Gamma.}$$

6. Si $a = 4$ et $b = 2$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ puis d'après la question 5.(b), $M_1^2 = I_2$ ou encore $\varphi_1^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}$. On sait alors que φ_1 est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ parallèlement à $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

La question 4.(b) montre que $\varphi_1(X-4) = X-4$ et $\varphi_1(X-2) = -(X-2)$. Le polynôme $X-4$ est donc un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ et le polynôme $X-4$ est un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$. Ces deux sous-espaces sont ainsi de dimension au moins 1. Mais ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans un espace de dimension 2. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = \dim(\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = 1$ puis que $(X-4)$ (resp. $(X-2)$) est une base de la droite vectorielle $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ (resp. $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$).

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à la droite Vect}(X-4) \text{ parallèlement à la droite Vect}(X-2).}$$

Partie B - Quelques généralités sur φ_n

7. Soit P in $\mathbb{R}_n[X]$. Alors le polynôme $(X-a)(X-b)P'$ est de degré au plus $n+1$ de même que le polynôme $\left(X - \dfrac{a+b}{2}\right)P$.
On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$. De plus, si on note a_n le coefficient de X^n dans P, le coefficient de X^{n+1} dans $\varphi_n(P)$ vaut $a_n(n-n) = 0$. On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc que φ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
La linéarité de φ_n s'établit alors comme à la question 1. et donc

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

8. (a) Pour tout réel x, $x^2-(a+b)x+ab = (x-a)(x-b)$. Comme $\alpha = \max(a,b)$, la fonction polynôme $x \mapsto x^2-(a+b)x+ab$ ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$. f est donc continue sur $]\alpha, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]\alpha, +\infty[.}$$

(b) Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab)$.

(c) Soit y une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{n}{2}\frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{n}{2}f(x)y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{-nF(x)/2}y'(x) - \frac{n}{2}f(x)e^{-nF(x)/2}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (e^{-nF/2}y)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{-nF(x)/2}y(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ y(x) = Ce^{nF(x)/2} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ y(x) = C(x^2-(a+b)x+ab)^{n/2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto C(x^2-(a+b)x+ab)^{n/2},\ C \in \mathbb{R}.}$$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker}(\varphi_{2p}) &\Leftrightarrow (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x-a)(x-b)P'(x) - n\left(x - \frac{a+b}{2}\right)P(x) = 0 \text{ (car I est infini)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ P'(x) - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}P(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ P(x) = C(x^2-(a+b)x+ab)^p \text{ (d'après (c))}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ P = C(X^2-(a+b)X+ab)^p \text{ (car I est infini).}
\end{aligned}$$

Comme $(X^2-(a+b)X+ab)^p$ est un polynôme de degré $2p = n$ et donc un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \text{Ker}(\varphi_{2p}) = \text{Vect}((X^2-(a+b)X+ab)^p).}$$

(e) Comme à la question précédente, P est dans $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $P(x) = C(x^2-(a+b)x+ab)^{(2p+1)/2}$.

- Si $a = b$, ceci s'écrit $\forall x \in I,\ P(x) = C(x-a)^{2p+1}$ ou encore $P = C(X-a)^{2p+1}$. Dans ce cas, puisque $(X-a)^{2p+1}$ est bien un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \text{Vect}((X-a)^{2p+1})$.
- Si $a \neq b$, ceci s'écrit $\forall x \in I,\ P(x) = C\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$. Maintenant, la fonction $x \mapsto \sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$ n'est pas la restriction à I d'une fonction polynôme (car par exemple $\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1} \underset{\alpha^+}{\sim} |b-a|^{(2p+1)/2}(x-\alpha)^{p+\frac{1}{2}}$ ce qui n'est vérifié par aucun polynôme). Dans ce cas, seul le polynôme nul est solution ou encore $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \{0\}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \left\{\begin{array}{l}\{0\} \text{ si } a \neq b\\ \text{Vect}((X-a)^{2p+1}) \text{ si } a = b\end{array}\right. .}$$

Partie C - Intersections de courbes dans le cas où $n = 2$

9. $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi_2(1) = (X-a)^2P' - 2(X-a)P$. Par suite, $\varphi_2(1) = -2X + 2a$, $\varphi_2(X) = (X-a)^2 - 2X(X-a) = -X^2 + a^2$ et $\varphi_2(X^2) = 2X(X-a)^2 - 2X^2(X-a) = -2aX^2 + 2a^2X$.

$$\boxed{\varphi_2(1) = -2X + 2a,\ \varphi_2(X) = -X^2 + a^2 \text{ et } \varphi_2(X^2) = -2aX^2 + 2a^2X.}$$

10. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 2a = -2ax^2 + 2a^2x \Leftrightarrow ax^2 - (a^2+1)x + a = 0 \Leftrightarrow (x-a)(ax-1) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a}.$$

Maintenant, puisque $a > 1$, les réels a et $\frac{1}{a}$ sont distincts. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent exactement deux points d'intersection, le point A_a de coordonnées $(a, f(a))$ ou encore $(a, 0)$ et le point B_a de coordonnées $(\frac{1}{a}, f(\frac{1}{a}))$ ou encore $(\frac{1}{a}, -\frac{2}{a} + 2a)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g \text{ admettent deux points d'intersection, les point } A_a(a, 0) \text{ et } B_a\left(\frac{1}{a}, -\frac{2}{a} + 2a\right).}$$

(b) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in E \Leftrightarrow \exists a > 1/ \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}\\ y = -\frac{2}{a} + 2a\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists a > 1/ \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}\\ y = -2x + \frac{2}{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in]0, 1[\text{ et } y = -2x + \frac{2}{x}.$$

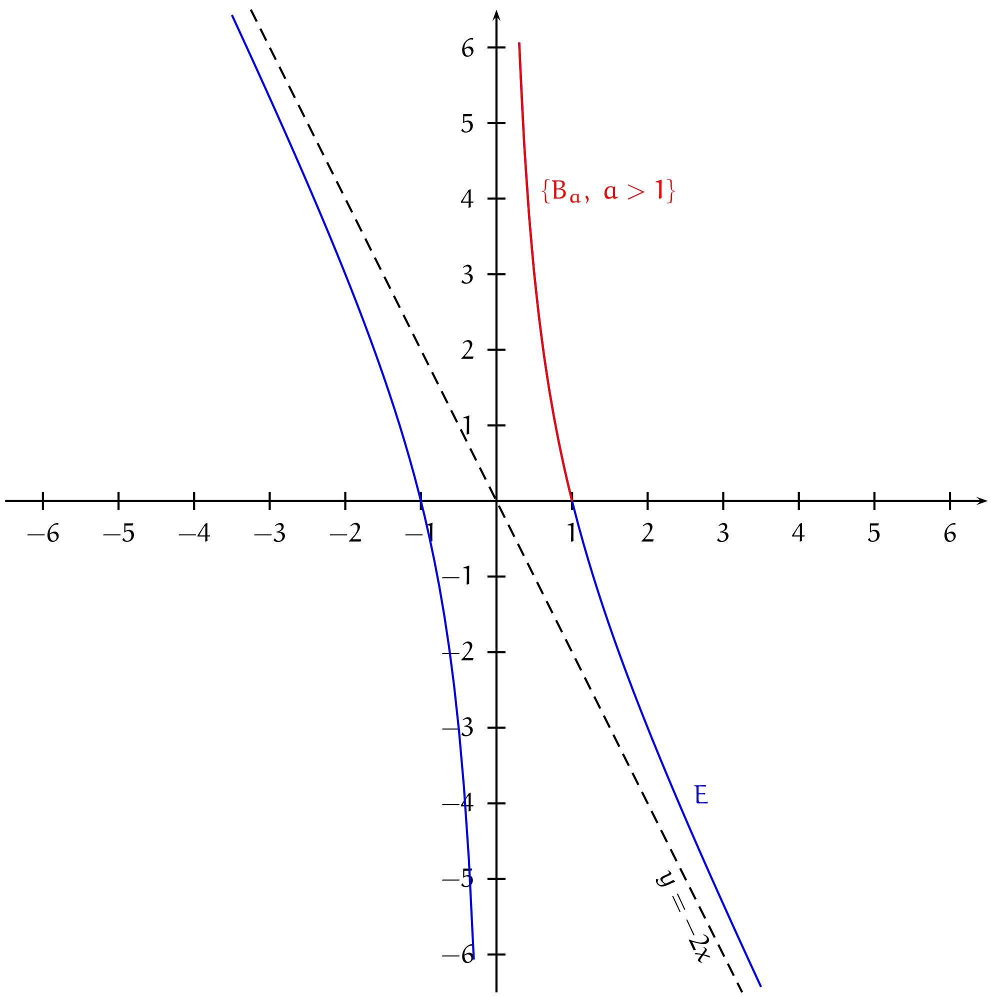
$$\boxed{\text{Les points } B_a \text{ appartiennent à l'ensemble E d'équation } y = -2x + \frac{2}{x}.}$$

(c) E est la courbe d'équation $2x^2+xy=2$. C'est une courbe du second degré. Son discriminant est $\Delta = 1\times 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.
Le discriminant est strictement négatif de sorte que E est une conique du genre hyperbole c'est-dire soit une hyperbole de centre O (puisque l'équation ne contient pas de terme de degré 1), soit une réunion de deux droites sécantes en O ce deuxième cas n'étant clairement pas le bon.

$$\boxed{E \text{ est une hyperbole de centre } O.}$$

(d) Notons h la fonction $x \mapsto -2x + \frac{2}{x}$. h est définie sur $\mathbb{R}^*$, impaire, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]0,+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) + 2x = 0$ ce qui montre que $\mathcal{C}_h$ admet la droite d'équation $y = -2x$ pour asymptote en $+\infty$.

Construction de E**.**



SECOND PROBLÈME

Partie A - Études de deux fonctions

1. (a) F et G sont continues sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathsf{F}(x) = 1$ et donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $\mathsf{F}(0) = 1$.

$\dfrac{1-\cos x}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x} = \dfrac{x}{2}$. Par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathsf{G}(x) = 0$ et G est prolongeable par continuité en 0 en posant $\mathsf{G}(0) = 0$.

2. (a) F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x > 0$, $\mathsf{F}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $\mathsf{G}'(x) = \dfrac{x\sin x - (1-\cos x)}{x^2}$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathsf{F}'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \text{ et } \mathsf{G}'(x) = \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}.}$$

(b) Quand x tend vers 0,

$$\mathsf{F}(x) = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x) = \mathsf{F}(0) + o(x).$$

F admet en 0 à droite un développement limité d'ordre 1. F est donc dérivable en 0 et de plus $\mathsf{F}'(0) = 0$.

De même, quand x tend vers 0,

$$\mathsf{G}(x) = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x} = \frac{x}{2} + o(x) = \mathsf{G}(0) + \frac{1}{2}x + o(x).$$

G est donc dérivable en 0 avec $\mathsf{G}'(0) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathsf{F} \text{ et } \mathsf{G} \text{ sont dérivables en } 0 \text{ avec } \mathsf{F}'(0) = 0 \text{ et } \mathsf{G}'(0) = \frac{1}{2}.}$$

3. (a) Soit $x > 0$. $\mathsf{F}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* /\ x = k\pi$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = k\pi.}$$

(b) Soit $x > 0$. $\mathsf{G}(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* /\ x = 2k\pi$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = 2k\pi.}$$

Pour tout entier naturel non nul, $b_k = a_{2k}$ et la suite (b_k) est extraite de la suite (a_k).

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- F est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$,
- F est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$,
- $\mathsf{F}(a_k) = \mathsf{F}(a_{k+1}) (= 0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $\mathsf{F}'(x_k) = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_k \in]a_k, a_{k+1}[/\ \mathsf{F}'(x_k) = 0.}$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, $\mathsf{F}'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ et donc pour tout réel $x > 0$, $\mathsf{F}'(x)$ est du signe de $h(x)$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. h est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ et pour $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $h'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = x\sin x$. Maintenant, pour $x \in]a_k, a_{k+1}[=]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $-x < 0$ et $(-1)^k \sin x > 0$. On en déduit que la fonction $(-1)^k h'$ est strictement négative sur $]a_k, a_{k+1}[$ et donc que h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } h \text{ est strictement monotone sur } [a_k, a_{k+1}].}$$

(d) La fonction h est ainsi injective sur $[a_k, a_{k+1}]$ et en particulier s'annule au plus une fois sur $[a_k, a_{k+1}]$. D'après la question (b), il en est de même de la fonction F' ce qui montre l'unicité du réel x_k.

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $h(a_k) = k\pi\cos k\pi - \sin k\pi = (-1)^k k\pi$ et $h(a_k + \frac{\pi}{2}) = (k\pi + \frac{\pi}{2})\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) - \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k$. Par suite, $h(a_k)h(a_k + \frac{\pi}{2}) = -k\pi < 0$. Ainsi, la fonction h est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et vérifie $h(a_k)h(a_k + \frac{\pi}{2}) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que la fonction h s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$. Par unicité de x_k, on a donc $x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[.}$$

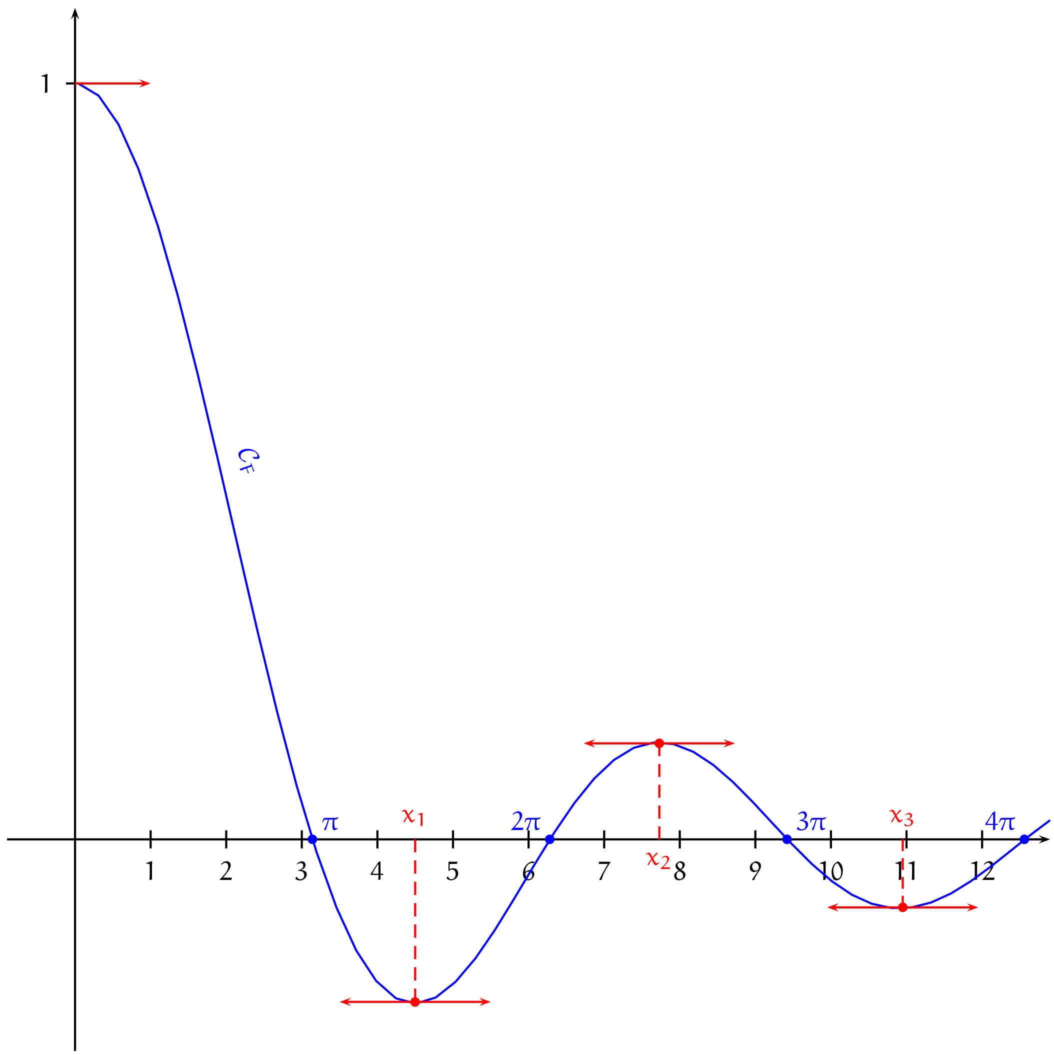
(f) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $x_k \geq k\pi$. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} k\pi = +\infty$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Plus précisément, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$ et donc

$$1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}.$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{2k} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$ et donc que

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{\sim} k\pi.}$$

5. Courbe représentative de F.



Partie B - Deux fonctions définies par des intégrales

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ sont continues sur le segment $[0,1]$. On en déduit l'existence des deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$.

$$\boxed{\text{Les deux fonctions } I_f \text{ et } J_f \text{ sont définies sur } \mathbb{R}.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$I_f(-x) = \int_0^1 f(t)\cos(-xt)\ dt = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\ dt = I_f(x) \text{ et } J_f(-x) = \int_0^1 f(t)\sin(-xt)\ dt = -\int_0^1 f(t)\sin(xt)\ dt = -J_f(x).$$

$$\boxed{I_f \text{ est paire et } J_f \text{ est impaire.}}$$

8. (a) Soit $x > 0$.

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\ dt + i\int_0^1 f(t)\sin(xt)\ dt = \int_0^1 f(t)(\cos(xt) + i\sin(xt))\ dt = \int_0^1 f(t)e^{ixt}\ dt.$$

Maintenant, les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \dfrac{e^{ixt}}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{x}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{x}\ dt = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\ dt.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\ dt.}$$

(b) Les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$ et donc bornées sur ce segment.

(c) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
|I_f(x) + iJ_f(x)| &= \left|\frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\ dt\right| \\
&\leq \frac{|f(1)||e^{ix}| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)||e^{ixt}|\ dt = \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)|\ dt \\
&\leq \frac{M+M}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 M'\ dt = \frac{2M+M'}{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{2M+M'}{x}.}$$

(d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2M+M'}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x) + iJ_f(x) = 0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} I_f(x) = \lim_{x\to+\infty} J_f(x) = 0.}$$

(e) Puisque la fonction I_f est paire, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} I_f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} I_f(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} I_f(X) = 0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} J_f(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} I_f(x) = \lim_{x\to-\infty} J_f(x) = 0.}$$

9. (a) Soient p et q deux réels. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sin t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin'(t)| = |\cos t| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis fournit alors

$$|\sin u| = |\sin u - \sin 0| \leq 1 \times |u - 0| = |u|.$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin u| \leq |u|.}$$

(c) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned}|I_f(x) - I_f(y)| &= \left|\int_0^1 f(t)\cos(xt)\ dt - \int_0^1 f(t)\cos(yt)\ dt\right| = \left|\int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt))\ dt\right| \\ &= \left|-2\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(x-y)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+y)t}{2}\right)\ dt\right| \\ &\leq 2\int_0^1 |f(t)|\left|\sin\left(\frac{(x-y)t}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{(x+y)t}{2}\right)\right|\ dt \\ &\leq 2\int_0^1 |f(t)|\left|\frac{(x-y)t}{2}\right| \times 1\ dt = |x-y|\int_0^1 t|f(t)|\ dt.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |I_f(x) - I_f(y)| \leq |x-y|\int_0^1 t|f(t)|\ dt.}$$

(d) Ainsi, la fonction I_f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{I_f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

10. Soit $x > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 1$. On a alors

$$I_f(x) = \int_0^1 \cos(xt)\ dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin x}{x} = F(x),$$

et

$$J_f(x) = \int_0^1 \sin(xt)\ dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1-\cos x}{x} = G(x).$$

$$\boxed{\text{Si } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 1, \text{ alors } \forall x > 0,\ I_f(x) = F(x) \text{ et } J_f(x) = G(x).}$$

