CONCOURS COMMUN 2007

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

Premier problème

I. Etude d'une fonction

1. • Etude en 0 à droite. D'après les théorèmes de croissance comparées

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} X^2 e^{-X} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à droite en 0. Ensuite,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} X^3 e^{-X} = 0.$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

$$\boxed{f \text{ est continue et dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0.}$$

• Etude en 0 à gauche. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} + \infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty \text{ et } f \text{ n'est pas continue à gauche en } 0.}$$

Donc f est continue à droite en 0.

2. • Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\frac{1}{x^2}$ tend 0 et $e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 1. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que la droite (Ox) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

• Dérivée et variations de f. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{-2x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Le signe de f' est clair et on peut dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$ 0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ 0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

3. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$

$$f''(x) = \left((-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}) e^{-\frac{1}{x}} \right)'(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^5} \right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{-2x + 1}{x^6} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{6x^2 - 6x + 1}{x^6} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$, f'' est du signe de $6x^2-6x+1$. Ce trinôme admet deux racines distinctes à savoir les réels $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$. Par suite f'' s'annule en changeant de signe en x_1 et x_2 et la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux points d'inflexion, les points d'abscisses x_1 et x_2. De plus f'' est strictement positive sur $]-\infty,0[$, sur $]0,x_1[$ et sur $]x_2,+\infty[$ et strictement négative sur $]x_1,x_2[$. Donc

$$\boxed{f \text{ est convexe sur }]-\infty,0[, \text{ sur } \left]0,\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right] \text{ et sur } \left[\frac{3+\sqrt{3}}{6},+\infty\right[\text{ et concave sur } \left[\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right].}$$

4. Graphe de f. Voir page suivante.

II. Calcul d'aires

5. Soit $h \in]0,1[$. Puisque f est continue et positive sur $[h,1]$,

$$\mathscr{A}(h) = \int_h^1 f(x)\,dx = \int_h^1 \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\,dx = \left[e^{-1/x}\right]_h^1 = e^{-1}-e^{-1/h} \text{ unités d'aires.}$$

$$\boxed{\forall h \in]0,1[,\ \mathscr{A}(h) = e^{-1}-e^{-1/h} \text{ unités d'aires ou aussi } \mathscr{A}(h) = 4(e^{-1}-e^{-1/h}) \text{ cm}^2.}$$

6. Quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} \mathscr{A}(h) = e^{-1} \text{ unités d'aires.}}$$

III. Résolution d'une équation différentielle

7. Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Sur I l'équation (E) s'écrit encore $y' + \left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)y = 0$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ est continue sur I, on sait que les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. De plus, pour $x \in I$,

$$x^2f'(x)+(2x-1)f(x) = \frac{-2x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2x-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est une solution non nulle de (E) sur I et donc

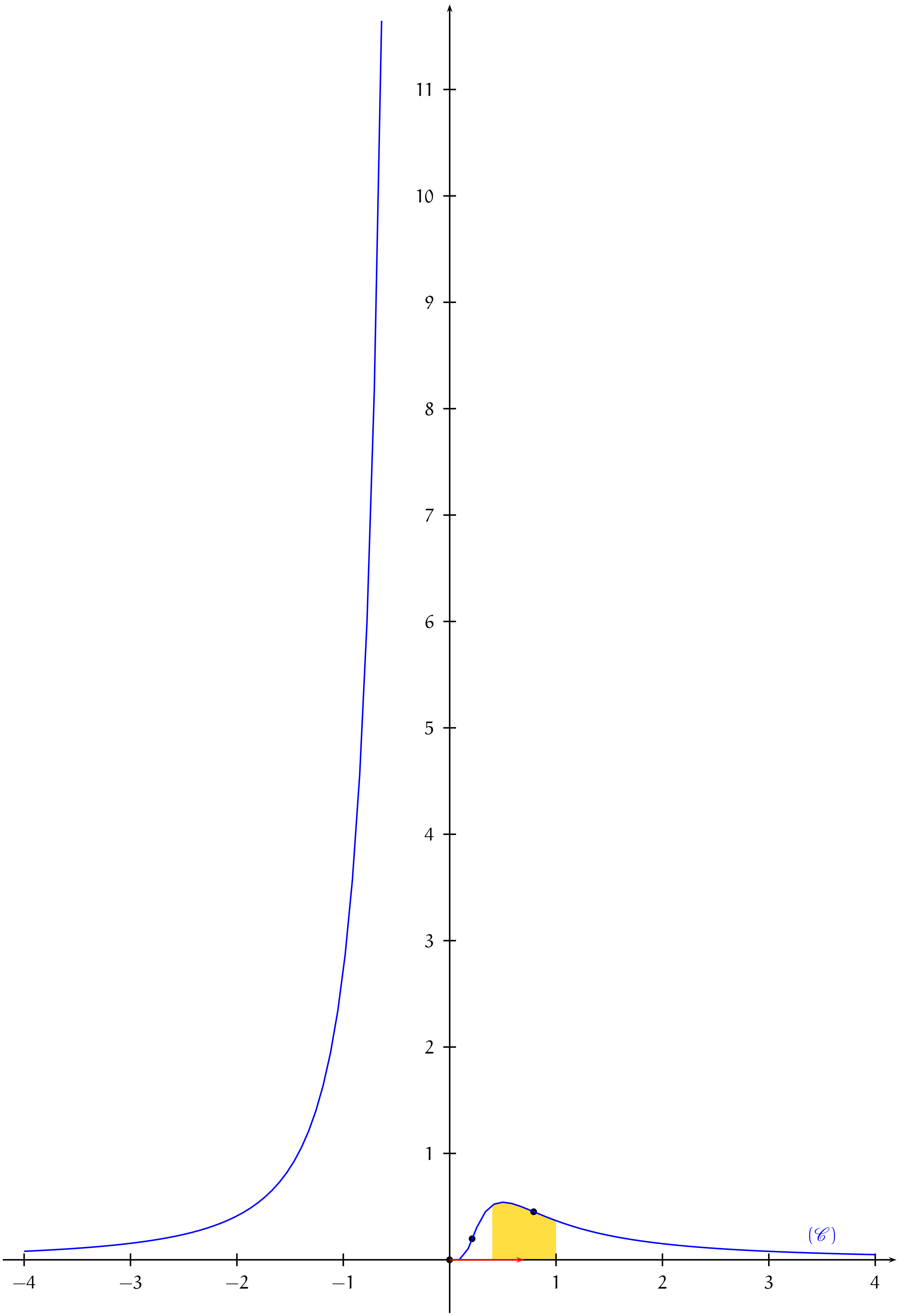
$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ ou sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } Cf \text{ où } C \text{ est un réel.}}$$

Si on n'a pas constaté que f est solution de (E) sur I, on doit résoudre directement :
Soit g une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ g'(x) + \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)g(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \exp\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)g'(x) + \left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\exp\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)g(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(\exp\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)g\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x^2e^{\frac{1}{x}}g)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/;\forall x \in I,\ x^2e^{\frac{1}{x}}g(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/;\forall x \in I,\ g(x) = C\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

8. On note que la fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit g une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement les restrictions de g à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont solutions de (E) sur ces intervalles et d'autre part nécessairement $g(0)=0$. Ainsi, si g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe nécessairement $(C_1,C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} C_1f(x) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ C_1f(x) \text{ si } x<0 \end{cases} = \begin{cases} C_1f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$$ (aller à la page 4).


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
$(\mathscr{C})$

Réciproquement une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0. D'après la question 1., g est dérivable en 0 à gauche si et seulement si $C_2 = 0$ et dans ce cas, $g'_g(0) = 0$. D'autre part g est dérivable à droite en 0 pour tout choix de C_1 et de plus $g'_d(0) = 0$. Enfin pour $C_2 = 0$ et C_1 quelconque, g est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $g'_g(0) = g'_d(0) = 0$ ce qui montre que g est dérivable en 0 et donc solution sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \begin{cases} Cf(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$ ou encore les fonctions de la forme $Cf\chi_{[0,+\infty[}$ où $\chi_{[0,+\infty[}$ est la fonction caractéristique de $[0,+\infty[$.

IV. Dérivées successives et polynômes associés

9. La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]0,+\infty[$ et la fonction $y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Mais alors la fonction f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

10. Montrons le résultat par récurrence.

- Si $n = 0$, on a pour $x > 0$ $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_0(x)}{x^{2\times 0+2}}e^{-\frac{1}{x}}$ où $\forall x > 0,\ P_0(x) = 1$ et le résultat est vrai si $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = P'_n(x) \times \frac{1}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{(2n+2)}{x^{2n+3}}P_n(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2P'_n(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Pour $x > 0$, posons $P_{n+1}(x) = x^2P'_n(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)$ (1). Alors P_{n+1} est un polynôme tel que pour tout réel $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}}e^{-\frac{1}{x}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

On note que la suite des polynômes P_n est uniquement définie par récurrence car $]0,+\infty[$ est un ensemble infini.

11. $P_0 = 1$. D'après les résultats des questions 2. et 3., $P_1 = -2X + 1$ et $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$. Ensuite

$$P_3 = X^2P'_2 + (1-6X)P_2 = X^2(12X-6) + (1-6X)(6X^2-6X+1) = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1,$$

et enfin

$$\begin{aligned} P_4 &= X^2P'_3 + (1-8X)P_3 = X^2(-72X^2+72X-12) + (1-8X)(-24X^3+36X^2-12X+1) \\ &= 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1, \end{aligned}$$

$$\boxed{P_0 = 1,\ P_1 = 1-2X,\ P_2 = 6X^2-6X+1\ P_3 = -24X^3+36X^2-12X+1 \text{ et } P_4 = 120X^4-240X^3+120X^2-20X+1.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant en 0 les deux membres de l'égalité (1), on obtient $P_{n+1}(0) = P_n(0)$. Par suite, la suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = P_0(0) = 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ,\deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

- Puisque $P_1 = -2X + 1$, le résultat est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. Alors $\deg(P'_n) = n-1$ (car $n \geq 1$) et donc $\deg(X^2P'_n) = n+1$. D'autre part, $\deg((1-2(n+1)X)P_n) = \deg XP_n = n+1$. Ceci montre déjà que $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$. De plus le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} vaut :

$$n\text{dom}(P_n) - 2(n+1)\text{dom}(P_n) = -(n+2)\text{dom}(P_n) = -(n+2) \times (-1)^n(n+1)! = (-1)^{n+1}(n+2)!,$$

ce qui démontre le résultat par récurrence

Le résultat restant valable pour $n = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ ,\deg(P_n) = n,\ \text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)! \text{ et } P_n(0) = 1.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$,

$$g^{(n+1)}(x) = (\exp(-1/x))^{(n+1)}(x) = ((\exp(-1/x))')^{(n)}(x) = (\frac{1}{x^2}\exp(-1/x))^{(n)}(x) = f^{(n)}(x).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n+1)} = f^{(n)}.}$$

14. Formule de Leibniz. Soient n un entier naturel non nul puis f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.}$$

15. Soit n un entier naturel non nul. Alors $n + 1 \geq 2$ et pour $x > 0$, on a d'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= x^2 f^{(n+1)}(x) + (n+1) \times 2x f^{(n)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \times 2 f^{(n-1)}(x) \\ &= x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1) f^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} = f^{(n)} &\Rightarrow \forall x > 0,\ x^2 \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} + 2(n+1)x \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} + n(n+1) \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \\ &\Rightarrow \forall x > 0,\ P_{n+1}(x) + 2(n+1)x P_n(x) + n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) = P_n(x) \\ &\Rightarrow \forall x > 0,\ P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x) P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x) P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)\ (2).}$$

16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Les égalités (1) et (2) fournissent

$$x^2 P'_n(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x) = (1 - 2(n+1)x) P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ P'_n(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x).}$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité (1) et en tenant compte de l'égalité $P'_{n+1} = -(n+2)(n+1)P_n$, on obtient pour $x > 0$

$$-(n+2)(n+1) P_n(x) = 2x P'_n(x) + x^2 P''_n(x) - 2(n+1) P_n(x) + (1 - 2(n+1)x) P'_n(x),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ x^2 P''_n(x) + (1 - 2nx) P'_n(x) + n(N+1) P_n(x) = 0.}$$

Deuxième problème

I. Changement de bases et division euclidienne

18. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1,2,3\},\ \lambda_1 Q_1(a_j) + \lambda_2 Q_2(a_j) + \lambda_3 Q_3(a_j) = 0$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 Q_1(a_1) = 0 \\ \lambda_2 Q_2(a_2) = 0 \\ \lambda_3 Q_3(a_3) = 0 \end{array}\right. \quad (\text{car } \forall i \neq j,\ Q_i(a_j) = 0)$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \quad (\text{car } \forall i,\ Q_i(a_i) \neq 0).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (Q_1, Q_2, Q_3) \text{ est libre.}}$$

19. En posant $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 5$, on a $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ P_i(a_j) = \delta_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array}\right.$.

20. Les trois polynômes P_1, P_2 et P_3 sont bien éléments de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisque a_1, a_2 et a_3 sont trois réels deux à deux distincts, la question 18. montre que la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Enfin, $\text{card}(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3) \text{ est une base du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R}_2[X].}$$

21. $P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}X^2$, $P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}X^2$ et $P_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2$. Donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$ est

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{P}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}.$$

22. La matrice A est la matrice d'une base dans une autre (ou encore A est une matrice de passage) et donc la matrice A est inversible. A^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{P}$ à la base $\mathscr{B}$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}X^2 \\ P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}X^2 \\ P_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}(-3 + 4X + 8P_3) \\ P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}(-3 + 4X + 8P_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ P_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}X + P_3 \\ P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X - 2P_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ X = 1 + 2P_2 + 4P_3 \\ P_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 + 2P_2 + 4P_3) + P_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ X = 1 + 2P_2 + 4P_3 \\ P_1 = 1 - P_2 - P_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = (P_1 + P_2 + P_3) + 2P_2 + 4P_3 \\ X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = -3(P_1 + P_2 + P_3) + 4(P_1 + 3P_2 + 5P_3) + 8P_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = P_1 + 5P_2 + 25P_3 \end{array}\right.$$

Mais alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{P}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.}$$

23. Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. La division euclidienne de P_1 par P_0 s'écrit $P_1 = Q_1 P_0 + \widehat{P_1}$ où $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(\widehat{P_1}) < \deg(P_0) = 3$ et la division euclidienne de P_2 par P_0 s'écrit $P_2 = Q_2 P_0 + \widehat{P_2}$ où $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(\widehat{P_2}) < \deg(P_0) = 3$. Mais alors

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1(Q_1 P_0 + \widehat{P_1}) + \lambda 2(Q_2 P_0 + \widehat{P_2}) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda 2 Q_2) P_0 + (\lambda_1 \widehat{P_1} + \lambda_2 \widehat{P_2}).$$

Comme $\deg(\lambda_1 \widehat{P_1} + \lambda_2 \widehat{P_2}) \leq \mathrm{Max}\{\deg(\widehat{P_1}), \deg(\widehat{P_2})\} < 3 = \deg(P_0)$, le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par P_0 est $\lambda_1 \widehat{P_1} + \lambda_2 \widehat{P_2}$ ou encore

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \widehat{P_1 + \lambda_2} P_2 = \lambda_1 \widehat{P_1} + \lambda_2 \widehat{P_2} = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

On a montré que

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

24. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\widehat{P} \in \mathbb{R}^2[X]$ et donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque $\deg(Q) < 3 = \deg(P_0)$, la division euclidienne de Q par P_0 s'écrit

$$Q = 0 \times P_0 + Q,$$

et en particulier $Q = \widehat{Q} \in \mathrm{Im}(f)$. Ceci montre que $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}(f)$ et finalement que

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X].}$$

25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $f(P) = 0 \Leftrightarrow \widehat{P} = 0 \Leftrightarrow P$ est divisible par P_0.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{\text{multiples de } P_0\} = \{QP_0,\ Q \in \mathbb{R}[X]\} = P_0\mathbb{R}[X].}$$

26. On a vu à la question 24 que si $Q \in \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Im}(f)$ alors $f(Q) = Q$. Par suite, pour tout polynôme P, $f^2(P) = f(f(P)) = f(P)$ (le polynôme $Q = f(P)$ étant dans $\mathrm{Im}(f)$). Donc

$$\boxed{f^2 = f}$$

On sait alors que f est la projection sur son image parallèlement à son noyau (qui sont supplémentaires dans ce cas) ou encore

$$\boxed{f \text{ est la projection sur } \mathbb{R}_2[X] \text{ parallèlement à } P_0\mathbb{R}[X].}$$

27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\widehat{P}$ est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ et puisque $\mathscr{P}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\widehat{P} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3.$$

En évaluant en 1, on obtient $\lambda_1 = \widehat{P}(1)$ d'après la question 19. De même en évaluant en 3 et 5, on obtient $\lambda_2 = \widehat{P}(3)$ et $\lambda_3 = \widehat{P}(5)$. Maintenant la division euclidienne de P par $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ s'écrit

$$P = Q(X-1)(X-3)(X-5) + \widehat{P},$$

où Q est un certain polynôme. En évaluant de nouveau en 1, on obtient $\widehat{P}(1) = P(1)$ et de même $\widehat{P}(3) = P(3)$ et $\widehat{P}(5) = P(5)$. Finalement

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \widehat{P} = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3.}$$

28. En particulier, $1 = \widehat{1} = 1 \times P_1 + 1 \times P_2 + 1 \times P_3 = P_1 + P_2 + P_3$ puis $X = 1 \times P_1 + 3 \times P_2 + 5 \times P_3 = P_1 + 3P_2 + 5P_3$ et $X^2 = 1^2 \times P_1 + 3^2 \times P_2 + 5^2 \times P_3 = P_1 + 9P_2 + 25P_3$. On retrouve ainsi les résultats de la question 22.

II. Calcul matriciel

29.

$$\begin{aligned}(M-I)(M-3I)(M-5I) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'autre part, il y a encore 5 produits autres que le produit $(M-I)(M-3I)(M-5I)$ se déduisant de ce produit par permutations des facteurs. Mais $(aM+bI)(cM+dI) = acM^2+(ad+bc)M+bdI = (cM+dI)(aM+bI)$. Par suite les trois facteurs commutent deux à deux et donc

$$\boxed{\begin{aligned}(M-I)(M-3I)(M-5I) &= (M-I)(M-5I)(M-3I) = (M-3I)(M-I)(M-5I) = (M-3I)(M-5I)(M-I)\\ &= (M-5I)(M-I)(M-3I) = (M-5I)(M-3I)(M-I) = 0.\end{aligned}}$$

30. $E = \text{Vect}(I, M, M^2)$ et donc

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

31. La famille (I, M, M^2) est une famille génératrice de E et donc $\dim(E) \leq 3$. Montrons que cette famille est libre. Tout d'abord

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0\\ 12 & 13 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}aI+bM+cM^2 = 0 &\Rightarrow a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 13 & 12 & 0\\ 12 & 13 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2b+12c=0\\ a+3b+9c=0\\ a+3b+13c=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4c=0\ (L_3-L_2)\\ 2b+12c=0\\ a+3b+9c=0\\ a+3b+13c=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0\\ 2b=0\\ a+3b=0\\ a+3b=0\end{array}\right. \Rightarrow a=b=c=0.\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (I, M, M^2) est libre et donc est une base de E. En particulier

$$\boxed{\dim(E) = 3.}$$

32. Montrons que Φ est linéaire. Soient $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^6$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ puis $P_1 = a_1 + b_1X + c_1X^2$ et $P_2 = a_2 + b_2X + c_2X^2$.

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2) &= (\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)I + (\lambda_1b_1+\lambda_2b_2)M + (\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)M^2\\ &= \lambda_1(a_1I+b_1M+c_1M^2) + \lambda_2(a_2I+b_2M+c_2M^2) = \lambda_1\Phi(P_1)+\lambda_2\Phi(P_2).\end{aligned}$$

Ainsi l'application Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ vers E. De plus, l'image par Φ de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est la base (I, M, M^2) de E et donc

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.}$$

33. On a vu à la question 28. que

$$\begin{array}{l} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = P_1 + 9P_2 + 25P_3 \end{array},$$

et le résultat de la question précédente permet alors d'écrire

$$\begin{array}{l} I = \Phi(1) = \Phi(P_1 + P_2 + P_3) = \Phi(P_1) + \Phi(P_2) + \Phi(P_3) = B_1 + B_2 + B_3 \\ M = \Phi(X) = \Phi(P_1 + 3P_2 + 5P_3) = \Phi(P_1) + 3\Phi(P_2) + 5\Phi(P_3) = B_1 + 3B_2 + 5B_3 \\ M^2 = \Phi(X^2) = \Phi(P_1 + 9P_2 + 25P_3) = \Phi(P_1) + 9\Phi(P_2) + 25\Phi(P_3) = B_1 + 9B_2 + 25B_3 \end{array}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I = B_1 + B_2 + B_3 \\ M = B_1 + 3B_2 + 5B_3 \\ M^2 = B_1 + 9B_2 + 25B_3 \end{array}.}$$

34. On a $B_1 = \frac{1}{8}(M - 3I)(M - 5I)$. La première égalité de la question 29 fournit alors $(M - I)B_1 = 0$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $M - 3I$ ou $M - 5I$ et en tenant compte du fait que les différents facteurs commutent deux à deux, on obtient $B_2B_1 = B_3B_1 = 0$. Ob obtient de même $B_2B_1 = B_2B_3 = B_3B_1 = B_3B_2 = 0$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2,\ (i \neq j \Rightarrow B_iB_j = 0).}$$

