CONCOURS COMMUN 2006

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

PREMIER PROBLEME

Etude d'une fonction.

1.

$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}.}$$

2. **a)** Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis $z = x + iy$.

$$z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = 8 \text{ et } |z^2| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \text{ et } \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z^2)) = \mathrm{sgn}(-6)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = 8 & (\mathrm{I}) \\ x^2 + y^2 = 10 & (\mathrm{II}) \\ xy < 0 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x^2 = 18 & (\mathrm{II}) + (\mathrm{I}) \\ 2y^2 = 2 & (\mathrm{II}) - (\mathrm{I}) \\ xy < 0 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (3, -1) \text{ ou } (x, y) = (-3, 1) \Leftrightarrow z = 3 - i \text{ ou } z = -3 + i.$$

$$\boxed{\text{Les racines carrées de } 8 - 6i \text{ sont } 3 - i \text{ et } -3 + i.}$$

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$f(z) = 1 + i \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $(1 + i)^2 - 4(-2 + 2i) = 8 - 6i = (3 - i)^2$. Cette équation admet donc deux solutions complexes distinctes à savoir $z_1 = \dfrac{(1 + i) + (3 - i)}{2} = 2$ et $z_2 = \dfrac{(1 + i) - (3 - i)}{2} = -1 + i$.

$$\boxed{\text{Les antécédents de } 1 + i \text{ par } f \text{ sont } 2 \text{ et } -1 + i.}$$

3. Soit $(h, z) \in \mathbb{C}^2$.

$$f(z) = h \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = h \Leftrightarrow z^2 = h(z - 2i) \text{ et } z \neq 2i \Leftrightarrow z^2 = h(z - 2i) \Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $h^2 - 8ih$ ou encore $h(h - 8i)$.

•Si $h \notin \{0, 8i\}$, ce discriminant est non nul. Dans ce cas, h admet exactement deux antécédents distincts.
•Si $h = 0$ ou $h = 8i$, ce discriminant est nul. Dans ce cas, h admet exactement un antécédent.

4. Ainsi, tout complexe h admet au moins un antécédent par f dans D. Ceci signifie que f est surjective ou encore que

$$\boxed{f(D) = \mathbb{C}.}$$

5. $1 + i$ a deux antécédents distincts, à savoir 2 et $-1 + i$. f n'est donc pas injective.

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. On a

$$|z-2i|^2 \frac{z^2}{z-2i} = (z-2i)\overline{(z-2i)}\frac{z^2}{z-2i} = (\overline{z}+2i)z^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} g(z) &= z^2(\overline{z}+2i+z) = (x^2-y^2+2ixy)(2x+2i) = 2x(x^2-y^2)-4xy+i(4x^2y+2(x^2-y^2)) \\ &= (2x^3-2xy^2-4xy)+i(4x^2y+2x^2-2y^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall z \in D,\ \mathrm{Re}(g(z)) = 2x^3-2xy^2-4xy \text{ et } \mathrm{Im}(g(z)) = 4x^2y+2x^2-2y^2.}$$

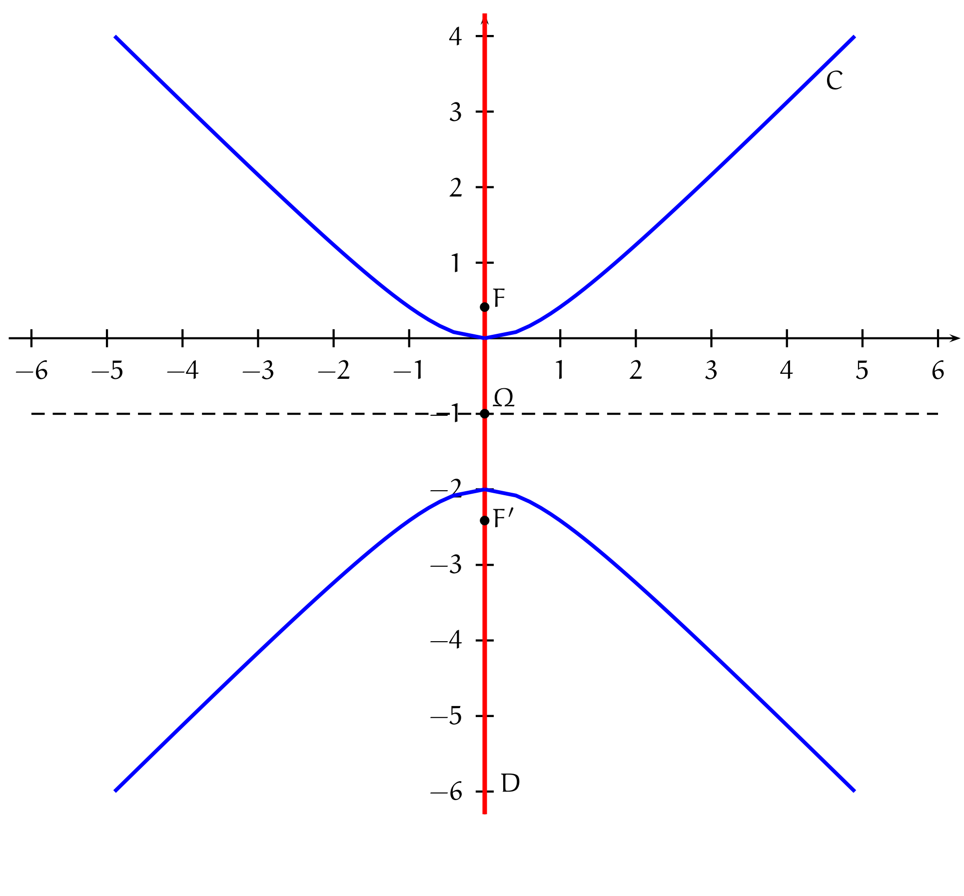
7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$\begin{aligned} g(z) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow 2x^3-2xy^2-4xy = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,2) \Leftrightarrow 2x(x^2-y^2-2y) = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,2) \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,2)) \text{ ou } x^2-y^2-2y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma \text{ est la réunion de l'axe } (Oy) \text{ privé du point d'affixe } 2i \text{ et de la conique d'équation } x^2-y^2-2y=0.}$$

8. $x^2-y^2-2y = 0 \Leftrightarrow x^2-(y+1)^2 = -1 \Leftrightarrow -x^2+(y+1)^2 = 1$. La courbe C est une hyperbole de centre $\Omega(0,-1)$, d'axe focal la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire la droite Δ) et d'axe non focal, la droite d'équation $y = -1$.
On a aussi $a = b = 1$ et donc $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$, puis $e = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$. Les foyers de C sont donc les points $F = (0,-1)+(0,\sqrt{2}) = (0,-1+\sqrt{2})$ et $F'(0,-1-\sqrt{2})$.

$$\boxed{C \text{ est une hyperbole d'excentricité } \sqrt{2} \text{ et de foyers les points de coordonnées } (0,-1+\sqrt{2}) \text{ et } (0,-1-\sqrt{2}).}$$



Etude d'un polynôme.

9. En développant $(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$ et en identifiant avec les coefficients de P_a, on obtient :

$$t_1+t_2+t_3=0 \text{ et } t_1t_2t_3=-2.$$

10. $P_a(0)=2>0$. De plus, $P_a(-\infty)=-\infty<0$. Comme P_a est continu sur $]-\infty,0]$, une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires montre que P_a a au moins une racine dans $]-\infty,0[$. En particulier, $t_1<0$.

11. Mais alors $t_2+t_3=-t_1>0$ et $t_2t_3=-\dfrac{2}{t_1}>0$. Par suite, $t_1<0<t_2\leq t_3$. Enfin, $-t_1=t_2+t_3\geq 0+t_3=t_3$. Finalement,

$$\boxed{t_1<0<t_2\leq t_3\leq -t_1.}$$

Ensuite, $2=(-t_1)t_2t_3\geq t_2^3$ et donc $1\leq t_2\leq \sqrt[3]{2}=1,...$. Donc, $t_2=1$. Il reste $2=(-t_1)t_3\geq t_3^2$ et donc $t_3=1$, et enfin $t_1=-2$. Ainsi, si a existe, nécessairement

$$\boxed{t_1=-2,\ t_2=t_3=1 \text{ et } \forall t\in\mathbb{R},\ P_a(t)=t^3-t(a^2+2a)+2=(t+2)(t-1)^2=t^3-3t+2.}$$

12. Puisque $t_2=1$ est racine double de P_a, on a $P_a(t_2)=P_a'(t_2)=0$. Ceci fournit $3-(a^2+2a)=0$ ou encore $(a-1)(a+3)=0$ ou enfin $a=1$ (puisque a est un entier naturel).

13. Réciproquement,

$$\boxed{P_1=X^3-3X+2=(X-1)^2(X+2) \text{ et } a=1 \text{ convient.}}$$

Etude de deux ensembles de matrices.

14. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$M_{x,y}\in GL_2(\mathbb{R})\Leftrightarrow \det M_{x,y}\neq 0\Leftrightarrow (x-y)(x+y)-2y\neq 0\Leftrightarrow (x,y)\notin C.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $-x^2+y^2+2y\neq 0$.

$$\begin{aligned} M_{x,y}M_{-x,y} &= \begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x-y & y \\ 2 & -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2+y^2+2y & 0 \\ 0 & -x^2+y^2+2y \end{pmatrix} \\ &= (-x^2+y^2+2y)I_2 \end{aligned}$$

Par suite, $M_{x,y}\times \dfrac{1}{-x^2+y^2+2y}M_{-x,y}=I_2$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Si } -x^2+y^2+2y\neq 0,\ (M(x,y))^{-1}=\frac{1}{-x^2+y^2+2y}M_{-x,y}=\frac{1}{-x^2+y^2+2y}\begin{pmatrix} -x-y & y \\ 2 & -x+y \end{pmatrix}.}$$

15. Σ ne contient pas 0 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

16. $J=\left\{\begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix},\ (x,y)\mathbb{R}^2\right\}=\{xI_2+yB,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$, où $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. J est le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par I_2 et B et est en particulier un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

17. La famille (I_2,B) est une famille génératrice de J. D'autre part, la matrice B n'est pas une matrice scalaire et la famille (I_2,B) est donc libre. On en déduit qu'une base de J est (I_2,B) et que J est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.

18. $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Plus généralement, pour $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$,

$$(xI_2 + yB) \times (x'I_2 + y'B) = (xx' + yy')I_2 + (xy' + yx')B \in J.$$

$$\boxed{\times \text{ est donc une loi interne dans J.}}$$

<u>**Etude d'une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.**</u>

19. Soient $(X,Y) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_B(\lambda X + \mu Y) = B(\lambda X + \mu Y) = \lambda BX + \mu BY = \lambda\varphi_B(X) + \mu\varphi_B(Y).$$

$$\boxed{\varphi_B \text{ est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel } (M_2(\mathbb{R}),+,.).}$$

20. **a)** On note que $M_{2,1}$ est inversible car $\det(M_{2,1}) = 1 \neq 0$. Soit alors $Y \in M_2(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi_{M_{2,1}}(X) = Y \Leftrightarrow M_{2,1}X = Y \Leftrightarrow X = (M_{2,1})^{-1}Y.$$

Ainsi, pour tout élément Y de $M_2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul élément X de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_{M_{2,1}}(X) = Y$. Ceci montre que $\varphi_{M_{2,1}}$ est bijective (et en particulier surjective).

b) $\varphi_{M_{2,1}}(E_{1,1}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{1,1} = E_{1,1} + 2E_{2,1}$.
$\varphi_{M_{2,1}}(E_{1,2}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{1,2} = E_{1,2} + 2E_{2,2}$.
$\varphi_{M_{2,1}}(E_{2,}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{2,1} = E_{1,1} + 3E_{2,1}$.
$\varphi_{M_{2,1}}(E_{2,2}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{2,2} = E_{1,2} + 3E_{2,2}$.
La matrice de φ_B dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

21. Dans ce cas, B n'est pas inversible. Mais alors, pour tout élément X de $M_2(\mathbb{R})$, on a $\det(BX) = \det(B)\det(X) = 0$ et donc, $\varphi_B(X)$ n'est pas inversible. Par suite, une matrice inversible comme I_2 n'a pas d'antécédent par φ_B. On en déduit que φ_B n'est pas surjective (et donc pas bijective).

DEUXIEME PROBLEME

Généralités sur f_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x, $|\cos x| \leq 1$ et en particulier, $2 - \cos x \neq 0$. f_n est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2-\cos(-x)} - \dfrac{-x}{n} = -\dfrac{\sin x}{2-\cos x} + \dfrac{x}{n} = -f_n(x)$. f_n est donc impaire.

3. f_0 est clairement 2π-périodique. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x+2\pi) - f_n(x) = -\frac{2\pi}{n} \neq 0.$$

Pour $n \geq 1$, f_n n'est pas 2π-périodique.

4. Néanmoins, pour $n \geq 1$, le calcul précédent montre le graphe de f_n sur un intervalle $[a, b]$ se déduit du graphe de f_n sur $[a-2\pi, b-2\pi]$ par translation de vecteur $(2\pi, -\dfrac{2\pi}{n})$. On peut donc étudier f_n et construire son graphe sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$, puis on obtient le graphe complet par translations successives de vecteur $(2\pi, -\dfrac{2\pi}{n})$ ou de vecteur $(-2\pi, \dfrac{2\pi}{n})$. Enfin, f_n étant impaire, il suffit de l'étudier et de construire son graphe sur $[0, \pi]$. On obtient alors le graphe sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie centrale de centre O.
La démarche est analogue pour f_0 qui est impaire et 2π-périodique.

Etude de la fonction f_0.

5. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

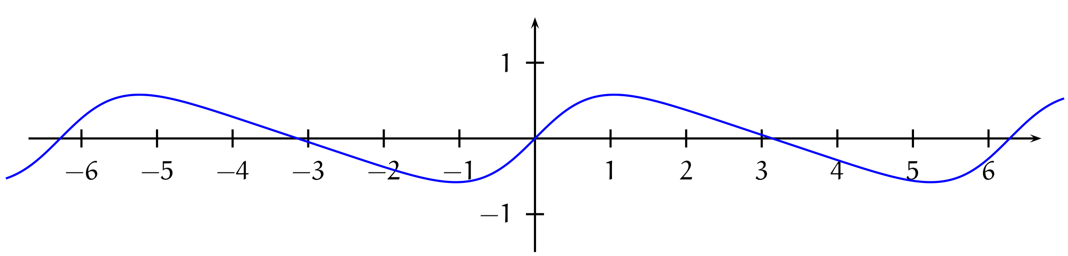
$$f_0'(x) = \frac{\cos x(2-\cos x) - \sin x(\sin x)}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}.$$

6. Sur $[0, \pi]$, f_0' est du signe de $2\cos x - 1$ et donc strictement positive sur $[0, \dfrac{\pi}{3}[$, strictement négative sur $]\dfrac{\pi}{3}, \pi]$ et nulle en $\dfrac{\pi}{3}$.

7. Tableau de variations de f.

x	0		$\pi/3$		π
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
f_0	0	$\nearrow$	$1/\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Graphe de f.



8. Le maximum de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et, f_0 étant impaire, le minimum de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit que le maximum de $|f_0|$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. Une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $F_0 \ : \ x \mapsto \ln(2-\cos x)$ et donc,

$$\int_0^{\pi/3} f_0(x)\ dx = [\ln(2-\cos x)]_0^{\pi/3} = \ln(\frac{3}{2}).$$

10. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (H) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x} f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (2-\cos x)f'(x) + (\sin x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ((2-\cos x)f)'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (2-\cos x)f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{C}{2-\cos x}
\end{aligned}$$

11. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(a\cos x + b)' + \frac{\sin x}{2-\cos x}(a\cos x + b) &= \frac{-a\sin x(2-\cos x) + \sin x(a\cos x + b)}{2-\cos x} = \frac{2a\sin x\cos x + (b-2a)\sin x}{2-\cos x}\\
&= \sin x \frac{2a\cos x + (b-2a)}{2-\cos x}
\end{aligned}$$

On choisit alors a et b tels que $b - 2a = 4$ et $2a = -2$, ou encore on prend $a = -1$ puis $b = 2$. Pour ces valeurs de a et b, $\sin x \dfrac{2a\cos x + (b-2a)}{2-\cos x} = 2\sin x$. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto -\cos x + 2$.

Puisque les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ et $x \mapsto 2\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ et de la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto -\cos x + 2 + \frac{C}{2-\cos x}.}$$

12. $h(0) = 1 \Leftrightarrow C + 1 = 1 \Leftrightarrow C = 0$. La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 en 0 est la fonction

$$\boxed{h \ : \ x \mapsto 2 - \cos x.}$$

Etude d'une courbe en polaire.

13. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$M(-\theta) = [\rho(-\theta), -\theta] = [-\rho(\theta), -\theta] = [\rho(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

La fonction ρ est 2π-périodique, et il en est de même de la fonction $\theta \mapsto M(\theta)$. On obtient la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. D'après ce qui précède, la portion de courbe obtenue quand θ décrit $[-\pi, 0]$ est la symétrique par rapport à l'axe (Oy) de la portion de courbe obtenue quand θ décrit $[0, \pi]$.

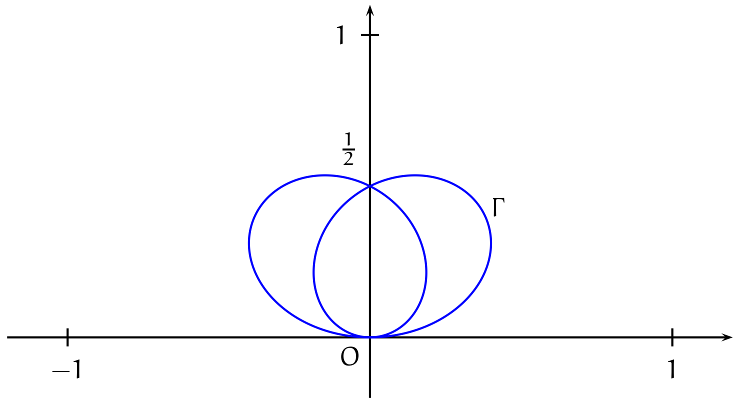
14. La tangente en $M(\frac{\pi}{2}) = [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}] = (0, \frac{1}{2})$ est dirigée par le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = \rho'(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u}_{\pi/2} + \rho(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{v}_{\pi/2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{i}) = -\frac{1}{4}(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}).$$

La tangente en $M(\frac{\pi}{2})$ est donc la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(0, \frac{1}{2})$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. C'est la droite d'équation cartésienne $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

15. Les variations de $\rho = f_0$ ont été étudiées à la question 7..
Puisque $\rho(0) = 0$, la tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0, ou encore l'axe des abscisses. Il en est de même en $M(\pi)$.

Allure de Γ.



<u>**Etude de la fonction**</u> $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}$.

16. g est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire.

17. Quand x tend vers 0, $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{2-\cos x} \sim 1.\dfrac{1}{2-1} = 1$. Donc, $g(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

18. On pose $g(0) = 1$ et on prolonge ainsi par continuité la fonction g en 0. Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)}{x(2-(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)))} = (1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3))(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3))^{-1}\\ &= (1-\frac{x^2}{6}+o(x^3))(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) = 1 + x^2(-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}) + o(x^3)\\ &= 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

19. g admet en particulier un développement limité d'ordre 1 en 0 à savoir $g(x) = 1 + 0.x + o(x)$. On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

20. g est dérivable sur $[0,\pi]$ et g' est strictement négative sur $]0,\pi]$. Donc, g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. g réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $[g(\pi), g(0)] = [0,1]$.

<u>**Etude d'une suite qui annule f_n.**</u>

21. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après

$$f_n(a) = 0 \Rightarrow f_0(a) - \frac{a}{n} = 0 \Rightarrow a = nf_0(a) \Rightarrow a = |a| = n|f_0(a)| \leq \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $a \in [0, \dfrac{n}{\sqrt{3}}]$ (erreur d'énoncé).

22. $f_n(0) = 0$ et 0 est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ (erreur d'énoncé). D'autre part, pour $x \in]0,\pi]$,

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2-\cos x} - \frac{x}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x(2-\cos x)} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}.$$

D'après **20.**, g réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,1]$. Comme $\dfrac{1}{n} \in [0,1]$, $\dfrac{1}{n}$ a un unique antécédent par g dans $[0,\pi]$.

On a $g(0) = 1$. Donc, pour $n = 1$, l'antécédent de $\dfrac{1}{n}$ est 0, ce qui montre que l'équation $f_1(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, \pi]$ et donc que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0, \pi]$, à savoir $x_1 = 0$.
Si $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n} < 1$ et l'antécédent de $\dfrac{1}{n}$ par g est dans $]0, \pi]$. Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, \pi]$ exactement deux solutions, à savoir 0 et un réel x_n élément de $]0, \pi]$.

23. Pour $n \geq 2$, on a $g(x_n) = \dfrac{1}{n}$ et donc, $x_n = h(\dfrac{1}{n})$ (où $h = g^{-1}$). Puisque g est continue sur $[0, \pi]$, h est continue sur $[0, 1]$ et en particulier en 0. La suite $(x_n) = (h(\dfrac{1}{n}))$ converge donc vers $h(0) = \pi$ (puisque $g(\pi) = 0$).

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \pi.}$$

FIN DU CORRIGE

