CONCOURS COMMUN 2005

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(spécifique MPSI)

Premier problème

Partie A.

1. f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$,

$$f'(t) = e^{-t}(-\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Puisque, pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}e^{-t} > 0$, $f'(t)$ est du signe de $\cos(t + \frac{3\pi}{4})$ et donc, la fonction f' est strictement positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et strictement négative sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Par suite, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et enfin, strictement croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $k \in \mathbb{Z}$, $f(t + 2k\pi) = e^{-t-2k\pi}\cos(t + 2k\pi) = e^{-2k\pi}f(t)$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $f(t) = e^{-2k\pi}f(t - 2k\pi)$. Puisque $e^{-2k\pi} > 0$, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ et enfin, strictement croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. $f(t) = u(t) \Leftrightarrow e^{-t}\cos t = e^{-t} \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Les points d'intersection de (C) et (C_1) sont les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 2k\pi \\ e^{-2k\pi} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$. De même, les points d'intersection de (C) et (C_2) sont les points de coordonnées $\begin{pmatrix} \pi + 2k\pi \\ -e^{-\pi-2k\pi} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si f a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on doit avoir $\ell = \lim\limits_{k \to -\infty} f(2k\pi) = \lim\limits_{k \to -\infty} e^{-2k\pi} = +\infty$, mais aussi $\ell = \lim\limits_{k \to -\infty} f(\pi + 2k\pi) = \lim\limits_{k \to -\infty} -e^{-\pi-2k\pi} = -\infty$, ce qui est absurde. Donc,

$$\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } -\infty.}$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$f'(2k\pi) = e^{-2k\pi}(-\cos(2k\pi) - \sin(2k\pi)) = -e^{-2k\pi} = u'(2k\pi)$$

ce qui montre que les tangentes à (C) et (C_1) aux points d'intersection de (C) et (C_1) sont les mêmes. De même,

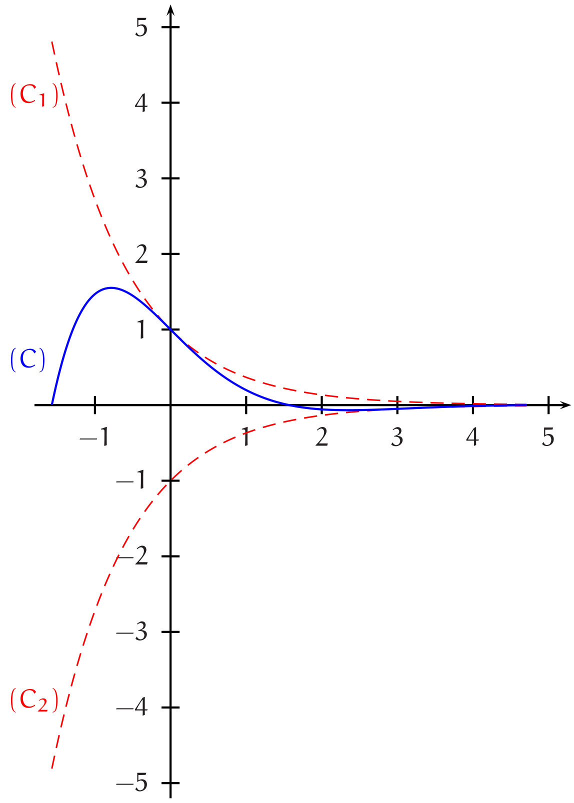
$$f'(\pi + 2k\pi) = e^{-\pi-2k\pi}(-\cos(\pi + 2k\pi) - \sin(\pi + 2k\pi)) = e^{-\pi-2k\pi} = v'(\pi + 2k\pi),$$

et les tangentes à (C) et (C_2) aux points d'intersection de (C) et (C_2) sont les mêmes.

5. Pour $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leqslant e^{-t}$, et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.}$$

6. Représentation graphique.



7. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1ère solution. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t}\cos t\ dt = \left[-e^{-t}\cos t\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} - \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} (-e^{-t})(-\sin t)\ dt \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t}\sin t\ dt = -\left[-e^{-t}\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} + \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} (-e^{-t})(\cos t)\ dt \\
&= \left[e^{-t}\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} - a_k = (-1)^k e^{\frac{\pi}{2}-(k+1)\pi} - (-1)^{k-1}e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} - a_k \\
&= (-1)^k e^{-k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right) - a_k,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = (-1)^k e^{-k\pi}\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{2} = (-1)^k e^{-k\pi}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right).}$$

8. La suite (a_n) est donc une suite géométrique de premier terme $a_0 = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et de raison $q = -e^{-\pi}$.

9. La suite (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et de raison $e^{-\pi}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $e^{-\pi} \neq 1$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1-(e^{-\pi})^{n+1}}{1-e^{-\pi}}.$$

Puisque $0 < e^{-\pi} < 1$, quand n tend vers $+\infty$, s_n tend vers

$$\ell = \frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{2} \times \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} \times \frac{e^{\pi/2}}{2}.$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} \times \frac{e^{\pi/2}}{2}.}$$

Ainsi, l'aire de la « réunion infinie » des domaines compris entre la courbe (C) et l'axe des abscisses, $x \geqslant -\dfrac{\pi}{2}$, n'est pas infinie mais vaut $\dfrac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} \times \dfrac{e^{\pi/2}}{2}$.

Partie B.

10. Pour $t \in [0, +\infty[$,

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} e^{-t}(-\cos t - \sin t) \\ e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix},$$

ou aussi $z(t) = e^{-t}(\cos t + i \sin t) = e^{(-1+i)t}$ et donc $z'(t) = (-1+i)e^{(-1+i)t}$. De même,

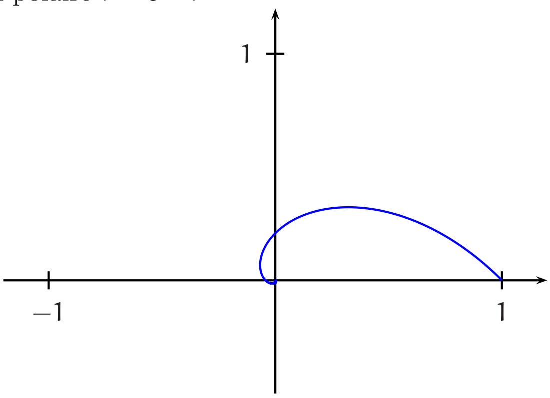
$$\overrightarrow{A(t)} = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t + \sin t - \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t + \sin t - \sin t - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\sin t \\ -2e^{-t}\cos t \end{pmatrix}.$$

11. Pour tout réel positif t, $\|\overrightarrow{OM(t)}\| = e^{-t}$.

12. On note que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{V}$ ne sont jamais nuls et donc que φ est toujours défini. Pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\varphi = \arg\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right) = \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi).$$

13. Puisque $\overrightarrow{OM(t)} = e^{-t}(\cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j})$ et que $e^{-t} > 0$, t est l'angle polaire $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)}\right)$ et donc, la courbe proposée est la courbe d'équation polaire $r = e^{-\theta}$.



Partie C

14. On a $M_\pi = -e^{-\pi} I_2$ et donc, F_π est l'homothétie (vectorielle) de rapport $-e^{-\pi}$.

15. On a $M_t = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et F_t est la composée de l'homothétie de rapport e^{-t} et de la rotation d'angle t (si de plus $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne et de son orientation canonique ou encore si la base canonique est supposée orthonormée directe), ou encore F_t est la similitude vectorielle plane directe de rapport e^{-t} et d'angle t.

L'expression complexe de cette transformation

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= e^{-t}[(\cos(t)x - \sin(t)y) + i(\sin(t)x + \cos(t)y)] = e^{-t}(\cos(t)(x+iy) + i\sin(t)(x+iy)) \\ &= e^{-t}e^{it}z = e^{(-1+i)t}z, \end{aligned}$$

permet aussi d'obtenir ce résultat.

16. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note H_t l'homothétie de rapport e^{-t} et R_t la rotation d'angle t, de sorte que $F_t = H_t \circ R_t = R_t \circ H_t$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & F_t \end{array}$. φ est une application de $\mathbb{R}$ dans F, clairement surjective.

Soit $(t, u) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) = \varphi(u) &\Rightarrow M_t = M_u \Rightarrow e^{-t}\cos(t) = e^{-u}\cos(u) \text{ et } e^{-t}\sin(t) = e^{-u}\sin(u) \\
&\Rightarrow e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) = e^{-u}(\cos(u) + i\sin(u)) \Rightarrow |e^{-t}e^{it}| = |e^{-u}e^{iu}| \\
&\Rightarrow e^{-t} = e^{-u} \Rightarrow t = u \text{ (car la fonction exponentielle est injective sur } \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Ainsi, φ est injective et donc bijective.

Enfin, pour $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, (puisqu'une homothétie vectorielle commute avec tout endomorphisme)

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) \circ \varphi(u) &= (H_t \circ R_t) \circ (H_u \circ R_u) = (H_t \circ H_u) \circ (R_t \circ R_u) \\
&= H_{t+u} \circ R_{t+u} \text{ (car } e^{-t} \times e^{-u} = e^{-(t+u)}) \\
&= F_{t+u} = \varphi(t + u)
\end{aligned}
$$

Le calcul ci-dessus montre déjà que $\circ$ est interne dans F, puis que φ est un morphisme bijectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le magma $(F, \circ)$ ou encore,

$\boxed{(F, \circ) \text{ est un groupe isomorphe au groupe } (\mathbb{R}, +).}$

Deuxième problème

Partie A.

1. $\mathscr{M}_2$ est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

2. L'image par f d'un élément de $\mathscr{M}_2$ est bien un élément de $\mathscr{M}_2$. D'autre part, pour $(M, N) \in (\mathscr{M}_2)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A - A(\lambda M + \mu N) = \lambda(MA - AM) + \mu(NA - AN) = \lambda f(M) + \mu f(N).$$

Par suite, f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2$.

3. K est le noyau de l'endomorphisme f et est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_2, +, .)$.

4. $f(I) = IA - AI = A - A = 0$ et $f(A) = A^2 - A^2 = 0$. Donc, I et A sont dans K.

5. Soit $(M, N) \in K^2$. Alors $AM = MA$ et $AN = NA$ et donc,

$$(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN),$$

puis $f(MN) = (MN)A - A(MN) = 0$ et donc MN est dans K.

6. Puisque $(K, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$, $(K, +)$ est en particulier un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$. De plus, K est stable pour le produit et contient I. On en déduit que $(K, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2, +, \times)$.

Partie B

7.

$$f(M) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ 0 & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & d \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a+c-d \\ -b & b \end{pmatrix}$$

8. **a)** K est un sous-espace vectoriel contenant I et A et on a déjà $\text{Vect}(I, A) \subset K$. Soit $M \in \mathscr{M}_2$.

$$M \in K \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a+c-d \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0 \text{ et } d = a + c.$$

Donc,

$$M \in K \Leftrightarrow \exists (a, c) \in \mathbb{R}^2 / \ M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a+c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists (a, c) \in \mathbb{R}^2 / \ M = aI + cA \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I, A).$$

Finalement,

$$\boxed{K = \text{Vect}(I, A).}$$

b) Puisque A n'est pas une matrice scalaire, la famille (I, A) est libre et donc,

$$\boxed{(I, A) \text{ est une base de } K.}$$

Par suite, $\dim K = 2$, puis d'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim(\mathscr{M}_2) - \dim(K) = 4 - 2 = 2$.

$$\boxed{\text{rg}(f) = 2.}$$

9. $A^2 = (E_{1,2} + E_{2,2})(E_{1,2} + E_{2,2}) = E_{1,2} + E_{2,2} = A$. Mais alors, on obtient immédiatement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = A.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque les matrices xI et yA commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}
N^n &= (xI + yA)^n \\
&= x^n I^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} I^{n-k} y^k A^k = x^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) A \\
&= x^n I + ((x+y)^n - x^n) A
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N^n = x^n I + ((x+y)^n - x^n)A.}$$

11. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis $N = xI + yA \in K$. Puisque la famille (I, A) est libre,

$$\begin{aligned}
N^2 = I &\Leftrightarrow x^2 I + ((x+y)^2 - x^2)A = I \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ et } (x+y)^2 - x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } (1+y)^2 = 1) \text{ ou } (x = -1 \text{ et } (-1+y)^2 = 1) \\
&\Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y(y+2) = 0) \text{ ou } (x = -1 \text{ et } y(y-2) = 0) \\
&\Leftrightarrow (x, y) = (1, 0) \text{ ou } (x, y) = (1, -2) \text{ ou } (x, y) = (-1, 0) \text{ ou } (x, y) = (-1, 2) \\
&\Leftrightarrow M = I \text{ ou } M = -I \text{ ou } M = I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } M = 2A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Partie C

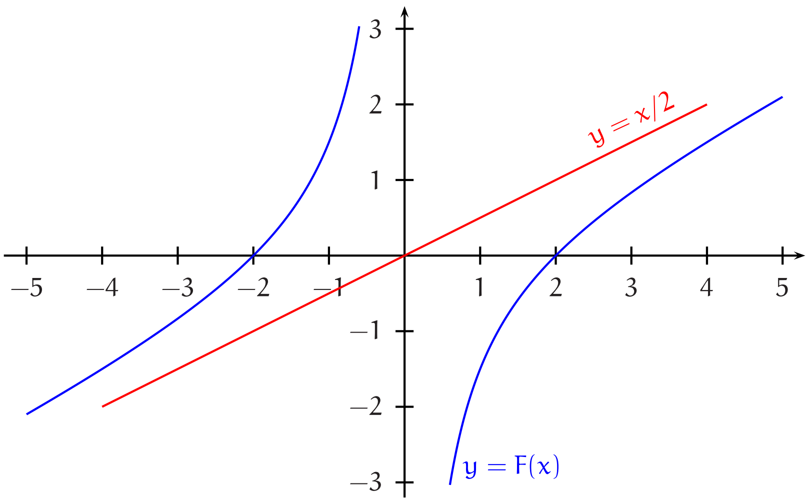
12. Puisque $(I - 2A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$, on a $s \circ s = Id$. s est donc une symétrie (affine).

Soit alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$s((x, y)) = (x, y) \Leftrightarrow (x - 2y, -y) = (x, y) \Leftrightarrow y = 0$. L'ensemble des points invariants par s est donc l'axe des abscisses.
$s((x, y)) = -(x, y) \Leftrightarrow (x - 2y, -y) = (-x, -y) \Leftrightarrow y = x$. s est la symétrie par rapport à l'axe $(0x)$ parallèlement à la droite vectorielle d'équation $y = x$.

13.

$$\overrightarrow{Am}.\overrightarrow{Om'} = 4 \Leftrightarrow (x - 0)(x - 2y) + (y - y)(-y) = 4 \Leftrightarrow x(x - 2y) = 4 \Leftrightarrow y = F(x) \text{ où } F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et donc, F est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. F est impaire, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en 0^+. $\mathscr{C}_F$ admet les droites d'équation $x = 0$ et $y = \frac{x}{2}$ pour asymptotes.



14. Notons que puisque s est une symétrie $M' = s(M) \Leftrightarrow M = s(M')$. Donc,

$$M(x, y) \in (\Gamma') \Leftrightarrow s(M) \in \Gamma \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (-y)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 = 1.$$

$$\boxed{\text{Une équation de } (\Gamma') \text{ est } x^2 - 4xy + 5y^2 = 1.}$$

15. Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases} x = \cos\alpha X - \sin\alpha Y \\ y = \sin\alpha X + \cos\alpha Y \end{cases}$.

16.

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma' &\Leftrightarrow (\cos\alpha X - \sin\alpha Y)^2 - 4(\cos\alpha X - \sin\alpha Y)(\sin\alpha X + \cos\alpha Y) + 5(\sin\alpha X + \cos\alpha Y)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow X^2(\cos^2\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha + 5\sin^2\alpha) + XY(8\cos\alpha\sin\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)) \\
&\quad + Y^2(\sin^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha + 5\cos^2\alpha) = 1 \\
&\Leftrightarrow X^2(1 - 2\sin(2\alpha) + 2(1 - \cos(2\alpha))) + XY(4\sin(2\alpha) - 4\cos(2\alpha)) + Y^2(1 + 2\sin(2\alpha) + 2(1 + \cos(2\alpha))) = 1 \\
&\Leftrightarrow (3 - 2(\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)))X^2 + 4(\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha))XY + (3 + 2(\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)))Y^2 = 1.
\end{aligned}$$

17. Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$, on obtient en particulier, $(3 - 2\sqrt{2})X^2 + (3 + 2\sqrt{2})Y^2 = 1$. On note alors que $3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$ et que $3 + 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2}$. Donc,

$$\boxed{\text{Une équation de } \Gamma' \text{ dans } \mathcal{R}' \text{ est donc } \frac{X^2}{(\sqrt{2} + 1)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2} - 1)^2} = 1.}$$

Γ' est donc une ellipse de centre O et de paramètres $a = \sqrt{2} + 1$ et $b = \sqrt{2} - 1$.