CONCOURS COMMUN 2005

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

PROBLEME D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

A- Etude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

A-1) Puisque $\mathcal{R}$ est orthonormé, $\overrightarrow{n_m} = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} - m\overrightarrow{k}$ convient.

Un système d'équation paramétrique de D est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 0.\lambda \\ y = 0 + 1.\lambda \\ z = 0 + 1.\lambda \end{array}\right.$. Un repère de D est donc $(A, \vec{u})$ où $A(1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tout réel λ,

$$(1) + m(\lambda) - m(\lambda) = 1,$$

et donc tout point de D est dans P_m, ou encore $D \subset P_m$.

A-2) $\overrightarrow{r_m} = (\vec{i} + m\vec{j} - m\vec{k}) \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2m\vec{i} - (m+1)\vec{j} + (1-m)\vec{k}$. Ce vecteur n'est jamais nul (que m soit nul ou pas) et donc $\vec{a}$ n'est jamais colinéaire à $\vec{n_m}$ ou enfin, D' n'est jamais orthogonale à P_m.

R_m est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{a} \wedge \overrightarrow{n_m} = \overrightarrow{r_m}$. Une équation cartésienne de R_m est donc

$$\boxed{2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0.}$$

A-3) Soit M un point du plan. On note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.

$$M \in P_m \cap Q \cap R_m \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + my - mz = 1 \\ y + z = 0 \\ 2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -y \\ x + 2my = 1 \\ 2mx - 2y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -y \\ y = mx \\ x + 2m^2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2m^2+1} \\ y = \dfrac{m}{2m^2+1} \\ z = -\dfrac{1}{2m^2+1} \end{array}\right.$$

Donc,

$$\boxed{I_m\left(\frac{1}{2m^2+1}, \frac{m}{2m^2+1}, -\frac{m}{2m^2+1}\right)_{\mathcal{R}}.}$$

A-4) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = x \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2$. (S) est donc la sphère de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$.

A-5) En notant (x, y, z) les coordonnées de I_m dans le repère $\mathcal{R}$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{2m^2+1})^2 + (\frac{m}{2m^2+1})^2 + (-\frac{m}{2m^2+1})^2 = \frac{1+2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{1}{1+2m^2} = x,$$

et donc $I_m \in (S)$.

Ainsi, I_m est sur la sphère (S) et par exemple sur le plan Q. Le centre Ω de (S) appartient au plan Q et donc $(S) \cap Q$ est un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$, le rayon de (S). I_m appartient à ce cercle.

A-6) Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit M un point de $\mathcal{E}$. On note (x, y, z) les coordonnées de ce point dans le repère $\mathcal{R}$.

$$M \in P_m \Leftrightarrow x + my - mz = 1 \Leftrightarrow m(y - z) = 1 - x \ (*).$$

Cette équation d'inconnue m admet une et une seule solution si et seulement si $y - z \neq 0$. Par suite, l'ensemble des points M par lesquels passent un et un seul plan P_m est l'espace $\mathcal{E}$ privé du plan p d'équation $y = z$.

D'autre part, si $y = z$, $(*)$ a des solutions si et seulement si $x = 1$ ou encore si et seulement si $M \in D$. La réunion des plans P_m, $m \in \mathbb{R}$, est donc $(\mathcal{E} \setminus p) \cup D$.

B- Etude d'un exemple d'application f

B-1) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{X} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\overrightarrow{X}.\vec{u} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = x + y + z$$

et

$$\overrightarrow{X} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (-5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (y - z)\vec{i} - (x + 5z)\vec{j} + (x + 5y)\vec{k},$$

Donc,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= 3(x + y + z)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - 3(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + ((y - z)\vec{i} - (x + 5z)\vec{j} + (x + 5y)\vec{k}) \\ &= (4y + 2z, 2x - 2z, 4x + 8y). \end{aligned}$$

B-2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y + 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -2y \\ x = -2y \\ 2(-2y) - 2(-2y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = z = -2y.$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Ker} f = \{(-2y, y, -2y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}).}$$

Le noyau de f est de dimension 1. Puisque le noyau de f n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, f n'est pas un automorphisme de E.

B-3) **Théorème du rang.** Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel F. Alors, $\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg} f = \dim E$.

Ici, $\mathrm{rg} f = \dim E - \dim(\mathrm{Ker} f) = 3 - 1 = 2$.

B-4)

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x\varphi(\overrightarrow{e_1}) + y\varphi(\overrightarrow{e_2}) + z\varphi(\overrightarrow{e_3}),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \varphi(\overrightarrow{e_3})). \end{aligned}$$

B-5)

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= \mathrm{Vect}(\varphi(\overrightarrow{i}), \varphi(\overrightarrow{j}), \varphi(\overrightarrow{k})) = \mathrm{Vect}((0, 2, 4), (4, 0, 8), (2, -2, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((0, 1, 2), (1, 0, 2), (1, -1, 0)) = \mathrm{Vect}((0, 1, 2), (1, 0, 2)), \end{aligned}$$

car $(1, -1, 0) = (1, 0, 2) - (0, 1, 2)$. Maintenant, la famille $((0, 1, 2), (1, 0, 2))$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$ et de cardinal $2 = \dim(\mathrm{Im} f)$. Donc,

$$\boxed{\text{la famille } ((0, 1, 2), (1, 0, 2)) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f.}$$

B-6) $f(\overrightarrow{i}) = (0,2,4)$ puis $f(f(\overrightarrow{i})) = (16,-8,16)$. Mais alors,

$$\det_B(f(f(\overrightarrow{i})), f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{i}) = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -64 \neq 0.$$

On en déduit que la famille $(f(f(\overrightarrow{i})), f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{i})$ est une base de E.

Ensuite, d'après B-2), $f(f(\overrightarrow{i})) \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(f(f(\overrightarrow{i}))) = (0,0,0)$. On en déduit

$$\boxed{A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

B-7) D'après B-6), le déterminant de P doit être égal à $\dfrac{1}{-64}$. Le déterminant de P_1 est à l'évidence un entier relatif de sorte que P n'est sûrement pas P_1. D'après l'énoncé, $P = P_2$.

On sait alors que $A = \mathcal{P}_B^{B'} A' (\mathcal{P}_B^{B'})^{-1} = (\mathcal{P}_{B'}^{B})^{-1} A' \mathcal{P}_{B'}^{B} = P^{-1} A' P$.

C- Etude d'un deuxième exemple

C-1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 /\ M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ $(\mathcal{P}_n)$.

La proposition $(\mathcal{P}_0)$ est vraie avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ car $M^0 = I_3$.
Soit $n \geq 0$. Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie. Alors,

$$M^{n+1} = M.M^n = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n \end{pmatrix},$$

et donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie avec $a_{n+1} = 2a_n - 6b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n - b_n$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 /\ M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ avec } a_0 = 1,\ b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = -3a_n - b_n \end{cases}.}$$

C-2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_{n+1} &= (-3a_{n+1} - b_{n+1}) + (3a_n + b_n) \\ &= -3(2a_n - 6b_n) + (3a_n + b_n) + (3a_n + b_n) = 20b_n, \end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0.}$$

C-3) L'équation caractéristique de la récurrence linéaire précédente est $z^2 - z - 20 = 0$. Les solutions de cette équation sont $q_1 = 5$ et $q_2 = -4$. On sait alors qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \lambda.(-4)^n + \mu.5^n$.

De plus, $b_0 = 0$ et $b_1 = -3$, ce qui fournit $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -4\lambda + 5\mu = -3 \end{cases}$, et donc $\lambda = -\mu = \dfrac{1}{3}$. Finalement, pour tout entier naturel n, on a $b_n = \dfrac{1}{3}((-4)^n - 5^n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $b_{n+1} = -3a_n - b_n$ on a

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{3}(b_n + b_{n+1}) \\ &= -\frac{1}{9}((-4)^{n+1} - 5^{n+1} + (-4)^n - 5^n) = -\frac{1}{9}(-4.(-4)^n + (-4)^n - 5.5^n - 5^n) \\ &= \frac{1}{3}((-4)^n + 2.5^n). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}((-4)^n + 2.5^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{3}((-4)^n - 5^n).}$$

C-4) $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -3 \\ -3 & 22 & -3 \\ -3 & -3 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = M + 20I_3$. Mais alors, $M^2 - M = 20I_3$ ou encore $M.\frac{1}{20}(M - I_3) = \frac{1}{20}(M - I_3).M = I_3$. Ceci montre que

$$\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{20}(M - I_3) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.}$$

D- Etude d'un troisième cas

D-1) Pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E, on a alors

$$g(g(\overrightarrow{X})) = \alpha\left[\left(\alpha(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{u})\right)\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}\right]\overrightarrow{v} = (\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}))\alpha(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = (\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}))g(\overrightarrow{X}).$$

Par suite, si $\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1$, alors $g^2 = g$ et donc g est un projecteur.

Réciproquement, si g est un projecteur, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E,

$$g(\overrightarrow{X}) = g(g(\overrightarrow{X})) = (\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}))g(\overrightarrow{X}).$$

Cette égalité est en particulier vérifiée quand $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{u}$. Mais, $g(\overrightarrow{u}) = \alpha\|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, et donc,

$$g(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}))g(\overrightarrow{u}) \Rightarrow \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1.$$

Finalement,

$$\boxed{g \text{ est un projecteur si et seulement si } \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1.}$$

D-2) Puisque α et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls, le noyau de g est $F_1 = \overrightarrow{u}^{\perp}$.
$\overrightarrow{u}$ n'est pas nul et donc F_1 est de dimension 2. Mais alors, l'image de g est de dimension 1 d'après le théorème du rang. Or, pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$, $g(\overrightarrow{X})$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, ce qui montre que l'image de g est contenue dans F_2 et finalement égale à F_2 pour des raisons de dimensions. En résumé, $F_1 = \text{Ker}g$ et $F_2 = \text{Im}g$. Puisque g est un projecteur, on sait que

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \text{ et } g \text{ est la projection sur } F_2 \text{ parallèlement à } F_1.}$$

D-3) 0n prend $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ (de sorte que $P = \overrightarrow{u}^{\perp}$). Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -3$ et d'après ce qui précède, on prend $\alpha = -\frac{1}{3}$. Pour $\overrightarrow{X} = (x, y, z) \in E$, on a alors

$$p(\overrightarrow{X}) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = -\frac{x+y+z}{3}(-5, 1, 1) = \frac{1}{3}(5x + 5y + 5z, -x - y - z, -x - y - z),$$

et donc

$$\boxed{\Pi_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

PROBLEME D'ANALYSE

A- Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A-1) $f(0)$ existe et pour $x \neq 0$, $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$. Donc,

$$\boxed{D = [0, 1[\cup]1, +\infty[.}$$

A-2) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln(x)} = 0$. Par suite, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = o(x) = f(0) + 0x + o(x)$. f admet un développement limité d'orde 1 en 0 et est donc dérivable en 0, et en particulier continue en 0. De plus, $f'(0) = 0$.

A-3) f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, 1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. Quand x tend vers 0, $f'(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} \to 0 = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0 ou encore

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1[.}$$

A-4) Sur $D \setminus \{0\}$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$ et donc f' est strictement négative sur $]0, 1[\cup]1, e[$, strictement positive sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. On en déduit le tableau de variations de f :

$$\begin{array}{c|ccc||cccc|}
x & 0 & & 1 & & e & & +\infty \\
\hline
f'(x) & 0 & - & & - & 0 & + & \\
\hline
 & 0 & & & +\infty & & & +\infty \\
f & & \searrow & & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & -\infty & & e & &
\end{array}$$

B- Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B-1) L'étude précédente montre en particulier que f est définie sur $[e, +\infty[$ et que $f([e, +\infty[) \subset [e, +\infty[$. Puisque $v_0 = 3 \in [e, +\infty[$, par récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n$ existe et $v_n \geq e$.

B-2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a en particulier $v_n > 0$. De plus, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$, car $v_n \geq e$ et donc $\ln(v_n) \geq 1$. La suite (v_n) est donc décroissante. Etant minorée par e, la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in [e, +\infty[$.

B-3) On a vu que f' est positive sur $[e, +\infty[$. D'autre part, pour $x \in [e, +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2 x} + (\ln x - 1)\frac{-2}{x \ln^3 x} = \frac{1}{x \ln^3 x}(\ln x - 2(\ln x - 1)) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Ainsi, f' est croissante sur $[e, e^2]$ et décroissante sur $[e^2, +\infty[$. Par suite, f' admet sur $[e, +\infty[$, un maximum égal à $f'(e^2) = \dfrac{2 - 1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$, et finalement

$$\boxed{\forall x \in [e, +\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}.}$$

B-4) **Inégalité des accroissements finis.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur I par un certain réel M. Alors, $\forall (a, b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

B-5) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur $I = [e, +\infty[$ et $|f'|$ est majorée sur I par $\frac{1}{4}$. De plus, $v_n \in I$ et $e \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|v_{n+1} - e| = |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

Pour $n = 0$, on a $|v_0 - e| = 3 - e \leq 1 = \frac{1}{4^0}$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. Alors, $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.}$$

B-6) On a $4^5 = 2^{10} = 1024 > 1000$. Par suite, $\frac{1}{4^5} < 10^{-3}$ et donc $\frac{1}{4^{20}} < 10^{-12}$. Mais alors, $|v_{20} - e| < 10^{-12}$.

C- Etude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$

C-1) Sur $D \setminus \{0\}$, g' est du signe de h. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(-2x)(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}.$$

h' est strictement positive sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et donc, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus $h(1) = 0$ et donc h est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

C-2) Quand x tend vers 1, $g(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x\ln(x)} \sim \dfrac{2(x-1)}{1(x-1)} = 2$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x \to 1} g(x) = 2.}$$

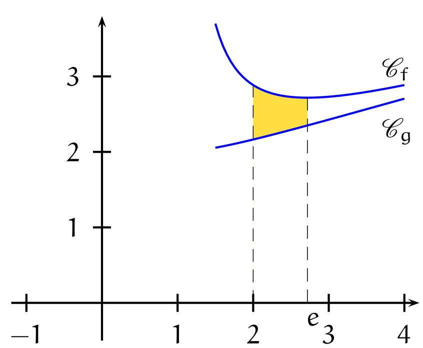
C-3) Soit $x \in D \setminus \{0\}$.

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Cette expression est du signe de $\ln(x)$ et donc $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $]0, 1[$.

Notons $\mathscr{A}$ l'aire à déterminer exprimée en unités d'aire. Sur $[2, e] \subset]1, +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ et donc,

$$\mathscr{A} = \int_2^e (f(x) - g(x))\ dx = \int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\ dx = [\ln|\ln(x)|]_2^e = -\ln(\ln 2) = \ln(\frac{1}{\ln 2}).$$



D- Tracé d'une courbe paramétrée

D-1) Quand t tend vers 0, x tend vers 0 et $y(t)$ tend vers $+\infty$. Donc, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (Γ). De plus, si $t \in]0, 1[$, $x(t) < 0$, et si $t \in]1, +\infty[$, $x(t) > 0$. Donc, (Γ) est strictement à gauche de l'axe (Oy) quand t décrit $]0, 1[$ et strictement à droite quand t décrit $]1, +\infty[$.

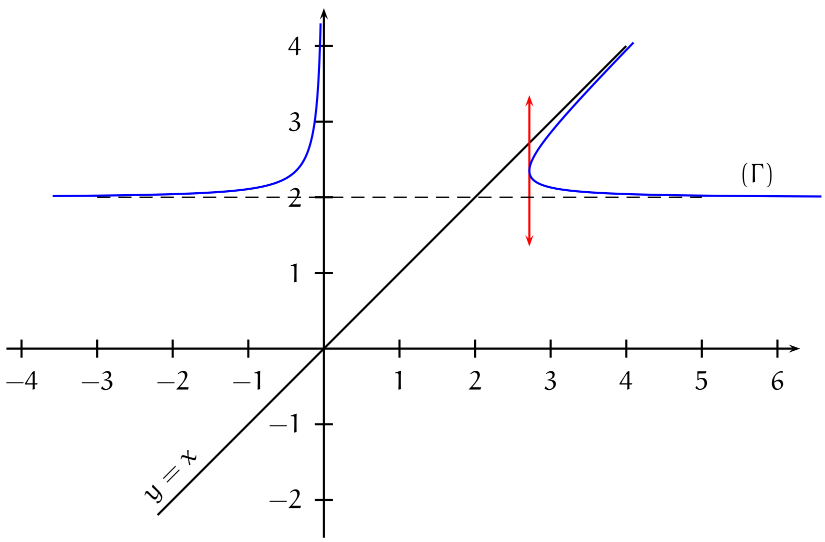
Quand t tend vers 1, x tend vers $\pm\infty$ et y tend vers 2. Donc, la droite (D_1) d'équation $y = 2$ est asymptote à (Γ). De plus, y est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et donc (Γ) est au-dessus de (D_1) quand t décrit $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Quand t tend vers $+\infty$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \sim \dfrac{t}{\ln(t)} = x(t) \to +\infty$. Ensuite,

$$y(t) - x(t) = \frac{t^2 - 1}{t\ln(t)} - \frac{t}{\ln(t)} = \frac{-1}{t^2\ln(t)} \to 0.$$

Donc, la droite D_2 d'équation $y = x$ est asymptote à (Γ). Enfin, $y(t) - x(t)$ est du signe de $-\ln(t)$ et donc (Γ) est strictement au-dessus de (D_1) quand t décrit $]0, 1[$ et strictement au-dessous quand t décrit $]1, +\infty[$.

D-2) On a $x'(e) = 0$ et $y'(e) \neq 0$. Donc, la tangente en $M(e) = (e, e - \dfrac{1}{e})$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{j}$: c'est la droite d'équation $x = e$.



E- Solutions d'une équation différentielle

E-1) Puisque y ne s'annule pas sur K, y est dérivable sur K si et seulement si z est dérivable sur K. De plus,

$$\begin{aligned}
(E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in K,\ -x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in K,\ -x^2\left(\frac{-y'(x)}{y^2(x)}\right) + x\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{y^2(x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in K,\ x^2y'(x) + xy(x) = 1\ (E_2).
\end{aligned}$$

E-2) Soit f une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_2) \text{ sur }]1, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ x^2f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ (xf)'(x) = \frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ xf(x) = \ln(x) + C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{\ln(x) + C}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists a \in]0, +\infty[/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{x} \Leftrightarrow \exists a \in]0, +\infty[/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}.
\end{aligned}$$

(on a posé $a = e^C$ ou encore $C = \ln(a)$).

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]1, +\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x},\ a \in]0, +\infty[.}$$

Pour $x > 1$ et $a > 1$, on a $ax > 1$ et donc $\ln(ax) > 0$. Par suite, g_a ne s'annule pas sur K.

E-3) Soit $a > 0$ et $x \in]0, \frac{1}{a}[\cup]\frac{1}{a}, +\infty[$.

$$(x, y) \in (C_a) \Leftrightarrow y = \frac{x}{\ln(ax)} \Leftrightarrow ay = \frac{ax}{\ln(ax)} \Leftrightarrow (ax, ay) \in C_1 \Leftrightarrow \text{hom}_{0,a}((x, y)) \in (C_1).$$

Ainsi, $\text{hom}_{0,a}((C_a)) = (C_1)$ ou encore $\text{hom}_{0,1/a}((C_1)) = (C_a)$.

$$\boxed{(C_a) \text{ est l'image de } (C_1) \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } \frac{1}{a}.}$$

F- Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

F-1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, f n'est pas définie sur $[x, 0[$ et $H(x)$ n'a aucun sens.
- $H(0)$ n'existe pas .
- Si $x \in]0, 1[$, f est continue sur $[0, x]$ et donc $\int_0^x f(t)\, dt$ existe puis, $H(x)$ existe.
- Si $x \geq 1$, f n'est pas définie en $1 \in [0, x]$ et $H(x)$ n'est pas défini.

Finalement,

$$\boxed{D_H =]0, 1[.}$$

F-2) Pour $x \in [0, 1[$, posons $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. f est continue sur $[0, 1[$. Par suite, F est définie et dérivable sur $[0, 1[$ et $F' = f$. Or, pour $x \in]0, 1[$,

$$H(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Ce dernier rapport tend vers $F'(0) = f(0) = 0$ et donc,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} H(x) = 0.}$$

F-3) On sait que $\lim\limits_{x \to 1,\ x<1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ et donc $\exists a \in]0, 1[$ tel que, pour tout x de $[a, 1[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x)}{x - 1} \leq \frac{3}{2}$, ou encore (puisque $x - 1 < 0$), $\frac{3}{2}(x - 1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x - 1)$.

Soit $x \in [a, 1[$. Pour $t \in [a, x]$, on a $\frac{3}{2}(t - 1) \leq \ln(t) \leq \frac{1}{2}(t - 1)$, et donc, par décroissance de la fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ sur $]-\infty, 0[$, $\frac{2}{t - 1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{2}{3(t - 1)}$ et enfin, $\frac{2t}{t - 1} \leq \frac{t}{\ln(t)} \leq \frac{2t}{3(t - 1)}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient alors $2\int_a^x \frac{t}{t - 1}\, dt \leq \int_a^x \frac{t}{\ln(t)}\, dt \leq \frac{2}{3}\int_a^x \frac{t}{t - 1}\, dt$. Maintenant,

$$\int_a^x \frac{t}{t - 1}\, dt = \int_a^x \frac{t - 1 + 1}{t - 1}\, dt = (x - a) + \ln\left|\frac{x - 1}{a - 1}\right|.$$

Ainsi, quand x tend vers 1, $\frac{2}{3}\int_a^x \frac{t}{t - 1}\, dt = (x - a) + \ln\left|\frac{x - 1}{a - 1}\right|$ tend vers $-\infty$. Il en est de même de $\int_a^x \frac{t}{\ln(t)}\, dt$, puis de $\int_0^x \frac{t}{\ln(t)}\, dt = \int_0^a \frac{t}{\ln(t)}\, dt + \int_a^x \frac{t}{\ln(t)}\, dt$.

Comme d'autre part, $\frac{1}{x}$ tend vers 1, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x \to 1} H(x) = -\infty.}$$

FIN DU CORRIGE

