CONCOURS COMMUN 2004

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

Premier problème

I. Résolution d'équations différentielles

1. Notons (E_0) l'équation proposée. La fonction $t \mapsto \operatorname{th} t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme λf_0, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) + \operatorname{th}(t)z(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(t)z'(t) + \operatorname{sh}(t)z(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch}.z)'(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(t)z(t) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \frac{C}{\operatorname{ch} t}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{C}{\operatorname{ch} t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Maintenant, pour une telle fonction z, $z(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{C}{1} = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Par suite, il existe une et une seule solution z de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $z(0) = 1$, à savoir

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ z_1(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.}$$

2. Notons (E) l'équation proposée. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{th} t$ et $t \mapsto t \operatorname{th} t$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $\lambda z_1 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_1 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $C.z_1$ où C est est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque,

$$(Cz_1)' + \operatorname{th}(t)(Cz_1) = C'z_1 + C(z_1' + \operatorname{th}(t)z_1) = C'z_1,$$

on a

$$\begin{aligned}
Cz_1 \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)z_1(t) = t.\operatorname{th} t \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = t.\operatorname{th} t.\operatorname{ch} t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = t.\operatorname{sh} t
\end{aligned}$$

Une intégration par parties fournit alors

$$\int t \operatorname{sh} t \, dt = t \operatorname{ch} t - \int \operatorname{ch} t \, dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + \lambda.$$

On peut prendre pour tout réel t, $C(t) = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$ et donc $C(t)z_1(t) = \dfrac{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = t - \operatorname{th} t$. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $t \mapsto t - \operatorname{th} t$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto t - \operatorname{th} t + \frac{C}{\operatorname{ch} t},\ C \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, pour une telle fonction z, $z(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 + \dfrac{C}{1} = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Par suite, il existe une et une seule solution z de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $z(0) = 0$, à savoir

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ z_2(t) = t - \operatorname{th} t.}$$

II. Etude d'un arc paramétré

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que la fonction ch est paire et que la fonction th est impaire. Donc

$$M(-t) = (x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t)).$$

Donc

$$\boxed{(Oy) \text{ est un axe de symétrie de } (\Gamma).}$$

4. Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers $+\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite $(0x)$ est asymptote à (Γ) quand t tend vers $+\infty$. Par symétrie, l'axe (Ox) est également asymptote à (Γ) quand t tend vers $-\infty$.

De plus, pour tout réel t, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} > 0$ ce qui montre que (Γ) est au-dessus de (Ox).

5. Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour t réel donné, on a

$$x'(t) = 1 - (1 - \operatorname{th}^2 t) = \operatorname{th}^2 t \text{ et } y'(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction x' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction y' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$. Donc y est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Tableau de variations conjointes des fonctions x et y

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'		$+$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$	

6. Le point A d'abscisse 0 est le point $M(0) = (0, 1)$. Puisque $x'(0) = y'(0) = 0$ le point $M(0)$ est un point singulier.

Pour t réel non nul donné. Le coefficient directeur de la droite $(M(0)M(t))$ est

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} t} - 1}{t - \operatorname{th} t} = \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}.$$

Quand t tend vers 0, $1 - \operatorname{ch} t \sim -\dfrac{t^2}{2}$. D'autre part,

$$t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = t\left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - \left(t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

Donc

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \sim \frac{-t^2/2}{t^3/3} = -\frac{3}{2t}.$$

Par suite,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = -\infty.$$

On en déduit que la tangente à (Γ) en A est (Oy). De plus, pour des raisons de symétrie, le point A est un point de rebroussement de première espèce.

7. a) Soit t le réel tel que $\operatorname{sh} t = 1$. Alors, (puisque la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$),

$$\operatorname{ch} t = +\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ puis } \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\text{si } \operatorname{sh} t = 1, \text{ alors } \operatorname{ch} t = \sqrt{2} \text{ et } \operatorname{th} t = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Déterminons alors t. On sait que $\operatorname{sh} t = 1 \Leftrightarrow t = \operatorname{argsh} 1$. De plus,

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = \sqrt{2} + 1,$$

et donc

$$\boxed{t = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).}$$

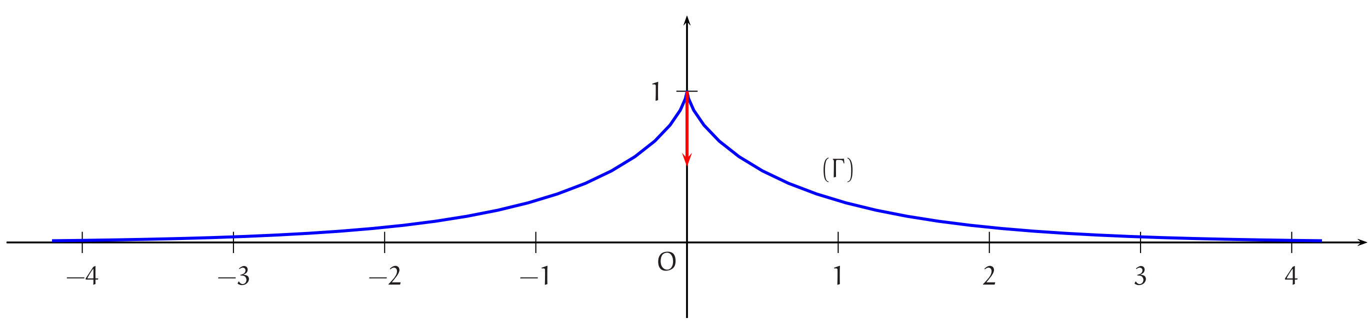
b) Pour tout réel non nul t, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t))$. Le coefficient directeur de la tangente en $M(t)$ est

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}.\frac{1}{\operatorname{th}^2 t} = -\frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Ce coefficient directeur vaut -1 si et seulement si $\operatorname{sh} t$ vaut 1 ou encore, d'après a), t vaut $\ln(\sqrt{2}+1)$. Dans ce cas, $\operatorname{ch} t = \sqrt{2}$ et $\operatorname{th} t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le coefficient directeur de la tangente en $M(\ln(\sqrt{2}+1)) = (\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ étant -1, une équation de cette tangente est $y = -\left(x - (\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}})\right) + 1$ ce qui s'écrit encore

$$y = -x + \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1.$$

8. Allure de (Γ)



9. **a)** Pour tout réel non nul t, la tangente au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\left(\text{th}^2 t, -\dfrac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}\right) = -\dfrac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}(-\text{sh}\, t, 1)$. Un autre vecteur directeur est $(-\text{sh}\, t, 1)$. Ce dernier résultat reste vrai quand $t = 0$ d'après 6. Donc

$$\text{pour tout réel } t, \text{ un vecteur directeur de la tangente en } M(t) \text{ est } (-\text{sh}\, t, 1).$$

Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $1.(x - (t - \text{th}\, t)) + \text{sh}\, t(y - \dfrac{1}{\text{ch}\, t}) = 0$ ou encore

$$x + (\text{sh}\, t)y = t.$$

b) Cette tangente n'est jamais parallèle à (Ox). Elle coupe l'axe $(0x)$ en le point $N = (t, 0)$. Par suite,

$$MN = \sqrt{(\text{th}\, t)^2 + \frac{1}{\text{ch}^2 t}} = \sqrt{\frac{\text{sh}^2 t + 1}{\text{ch}^2 t}} = 1.$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M(t)N(t) = 1.}$$

III. Etude d'intégrales et de suites

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}^k t}$ est continue sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. Donc $I_k(x)$ existe.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = e^t$ et donc $t = \ln u$ puis $dt = \dfrac{du}{u}$, on obtient

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\text{ch}\, t}\, dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2}\, du = 2(\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_1(x) = 2\,\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$I_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^2 t}\, dt = [\text{th}\, t]_0^x = \text{th}\, x.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_2(x) = \text{th}\, x.}$$

12. **a)** Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \text{sh}\, t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}^{k+1} t}$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^k t}\, dt = \int_0^x \text{ch}\, t.\frac{1}{\text{ch}^{k+1} t}\, dt = \left[\text{sh}\, t.\frac{1}{\text{ch}^{k+1} t}\right]_0^x - \int_0^x \text{sh}\, t \frac{-(k+1)\,\text{sh}\, t}{\text{ch}^{k+2} t}\, dt \\
&= \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x} + (k+1)\int_0^x \frac{\text{sh}^2 t}{\text{ch}^{k+2} t}\, dt = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x} + (k+1)\int_0^x \frac{\text{ch}^2 t - 1}{\text{ch}^{k+2} t}\, dt \\
&= \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x} + (k+1)\left(\int_0^x \frac{1}{\text{ch}^k t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^{k+2} t}\, dt\right) \\
&= \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x} + (k+1)(I_k - I_{k+2}).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(k+1)I_{k+2} = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x} + kI_k.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_{k+2} = \frac{k}{k+1}I_k + \frac{1}{k+1}\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^{k+1} x}.}$$

b)

$$I_3 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{2}(2\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{Arctan}(e^x) + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4},$$

et

$$I_4 = \frac{2}{3}I_2 + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{2}{3}\operatorname{th} x + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_3(x) = \operatorname{Arctan}(e^x) + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4} \text{ et } I_4(x) = \frac{2}{3}\operatorname{th} x + \frac{\operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x}.}$$

13. a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$I_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}\,dt = \int_0^{x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k(-u)}\,(-du) = -\int_0^{x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k u}\,du = -I_k(x).$$

Donc,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_k \text{ est impaire.}}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^∞ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, on a

$$I_k'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^k x}, \text{ puis } I_k''(x) = -\frac{k\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x},$$

et enfin

$$I_k'''(x) = -k\left(\operatorname{ch} x\frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + \operatorname{sh} x\frac{-(k+1)\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+2} x}\right) = -k\frac{\operatorname{ch}^2 x - (k+1)\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^{k+2} x}.$$

15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet un développement limité d'ordre 3 en 0 fourni par la formule de Taylor-Young.

$$\begin{aligned} I_k(x) &\underset{x\to 0}{=} I_k(0) + I_k'(0)x + \frac{I_k''(0)}{2}x^2 + \frac{I_k'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 0 + 1.x + 0.x^2 + \frac{-k}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\boxed{I_k(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3).}$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $I_k'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k x} > 0$. Donc la fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

17. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier, pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} = I_k(n+1) > I_k(n) = u_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

b) Soit t un réel positif. Puisque $e^{-t} > 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{e^{-t} + e^t} \leq \dfrac{2}{e^t} = 2e^{-t}$.
Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$I_k(n) = \int_0^n \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)^k \, dt \leq \int_0^n (2e^{-t})^k \, dt = 2^k \int_0^n e^{-kt} \, dt = \frac{2^k}{k}(1 - e^{-nk}) \leq \frac{2^k}{k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ I_k(n) \leq \frac{2^k}{k}.}$$

La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée (par $\dfrac{2^k}{k}$). On en déduit que la suite (u_n) converge.

18. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel positif x on a alors

$$I_k(x) \leq I_k(E(x) + 1) \leq \frac{2^k}{k}.$$

Ainsi, la fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée (par $\dfrac{2^k}{k}$). La fonction I_k a donc une limite réelle en $+\infty$ ou encore J_k existe dans $\mathbb{R}$.

b) $J_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} I_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} I_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{th} x) = 1$.

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_2 = 1.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$J_{k+2} = \lim_{x \to +\infty} I_{k+2}(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{k}{k+1} I_k(x) + \frac{1}{k+1} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}.\right) = \frac{k}{k+1} J_k,$$

(car $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} \sim \dfrac{e^x/2}{(e^x/2)^{k+1}} = \dfrac{1}{2^k} e^{-kx} \to 0$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_{k+2} = \frac{k}{k+1} J_k.}$$

Détaillons davantage cette récurrence. Pour les entiers impairs, elle s'écrit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-1}.$$

Donc pour tout entier naturel non nul p, on a

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \frac{2p-5}{2p-4} \dots \frac{1}{2} J_1 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2.1}{((2p)(2p-2)\dots.(2.2).(2.1))^2} . \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.}$$

De même, pour les entiers pairs, la récurrence s'écrit

$$\forall p \geq 2,\ J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} J_{2p-2}.$$

Donc pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a

$$J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} \frac{2p-4}{2p-3} \dots \frac{2}{3} J_2 = \frac{((2p-2)(2p-4)\dots 4.2)^2}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 3.2} .1 = \frac{(2^{p-1}(p-1)!)^2}{(2p-1)!},$$

ce qui reste vrai quand $p = 1$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p} = \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}.}$$

Deuxième problème

I. Etude de structures

1. **a)** $E = \{aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{1,2},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) D'après a), la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de E. D'autre part, la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est libre en tant que sous-famille de la famille libre $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ (qui est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\text{une base de } E \text{ est } (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}) \text{ et } \dim(E) = 3.}$$

2. **a)** Soient $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in E.$$

Ainsi, le produit de deux éléments de E est encore un élément de E et

$$\boxed{E \text{ est stable pour la multiplication des matrices.}}$$

b) $E \neq \varnothing$ car $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$.

Puisque $(E, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$, $(E, +)$ est en particulier un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et on a : $\forall (M, N) \in E^2,\ M - N \in E$.

Puisque E est stable pour le produit matriciel, on a $\forall (M, N) \in E^2,\ M \times N \in E$.

En résumé,
- $I_2 \in E$;
- $\forall (M, N) \in E^2,\ M - N \in E$;
- $\forall (M, N) \in E^2,\ M \times N \in E$.

On en déduit que

$$\boxed{E \text{ est un sous-anneau de l'anneau } (\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times).}$$

c) $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ sont dans E. $E_{1,2}E_{1,1} = 0$ et $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2} \neq 0$. Donc $E_{1,1}E_{1,2} \neq E_{1,2}E_{1,1}$ et E n'est pas commutatif.

3. Vérifions que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et donc $G \neq \varnothing$.
- Soit $(a, b, c) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Alors

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab > 0,$$

et en particulier $\det\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq 0$. Donc tout élément de G est dans $\mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$ ou encore $G \subset \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.
- Soit $(a, b, c, a', b', c') \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times\mathbb{R}\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in G \text{ car } aa' > 0 \text{ et } bb' > 0.$$

- Soit $(a, b, c) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. On sait que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{-c}{ab} \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix} \in G \text{ car } \frac{1}{a} > 0 \text{ et } \frac{1}{b} > 0.$$

Finalement, G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ et en particulier,

$$\boxed{G \text{ est un groupe multiplicatif.}}$$

II. Puissances d'une matrice et suites

4. a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\neq b$ puis $A=\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}$. Montrons par récurrence que

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ A^p=\begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^p\end{pmatrix}.$$

• Pour $p=1$, $\begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}=A^1$. La formule proposée est donc vraie pour $p=1$.

• Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que $A^p=\begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^p\end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}A^{p+1}&=A\times A\\ &=\begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{p+1} & ca^p+bc\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^{p+1}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a^{p+1} & c\dfrac{a^p(a-b)+b(a^p-b^p)}{a-b}\\ 0 & b^{p+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{p+1} & c\dfrac{a^{p+1}-b^{p+1}}{a-b}\\ 0 & b^{p+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq b\Rightarrow\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}^p=\begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\\ 0 & b^p\end{pmatrix}.}$$

b) Soit $(a,c)\in\mathbb{R}^2$ puis $A=\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & a\end{pmatrix}$. On a donc $A=aI_2+cE_{1,2}$. On note que $E_{1,2}^2=0$ et donc que pour $k\geq 2$, $E_{1,2}^k=0$. Mais alors, puisque les matrices aI_2 et $cE_{1,2}$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire pour $p\in\mathbb{N}^*$

$$A^p=(aI_2+cE_{1,2})^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(aI_2)^{p-k}(cE_{1,2})^k=a^pI_2+pa^{p-1}cE_{1,2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall(a,c)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} a & c\\ 0 & a\end{pmatrix}^p=\begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c\\ 0 & a^p\end{pmatrix}.}$$

5. a) Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soient n un entier naturel, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Si il existe un réel M tel que pour tout réel t de I, $|f^{(n+1)}(t)|\leq M$, alors

$$\forall(a,b)\in I^2,\ \left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leq\frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

b) Soient n un entier naturel non nul et x un réel. Soit I l'intervalle $[0,x]$ si $x\geq 0$ et $[x,0]$ si $x<0$. Pour $t\in I$, posons $f(t)=e^t$. f est de classe C^{n+1} sur I et pour tout réel t de I, on a

$$|f^{(n+1)}(t)|=e^t\leq e^{|x|},$$

car si $x\geq 0$, $t\in I\Rightarrow t\leq x=|x|$ et si $x<0$, $t\in I\Rightarrow t\leq 0\Rightarrow t\leq -x=|x|$.

Appliquons alors l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE avec $a = 0$ et $b = x$. Puisque pour tout entier naturel k, on a $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, on obtient

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Les théorèmes de croissances comparées permettent d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (comparaison d'une suite géométrique et d'une factorielle) et on a donc montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = e^x.}$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. D'après 4.a), on a

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} & \dfrac{c}{a-b}\left(\sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} - \sum_{p=0}^{n} \dfrac{b^p}{p!}\right) \\ 0 & \sum_{p=0}^{n} \dfrac{b^p}{p!} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\alpha_n = \varphi_n(a),\ \beta_n = \varphi_n(b) \text{ et } \gamma_n = c\frac{\varphi_n(a) - \varphi_n(b)}{a-b}.$$

La question b) permet d'affirmer que les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent et que ces suites ont pour limites respectives

$$\boxed{\alpha = e^a,\ \beta = e^b \text{ et } \gamma = c\frac{e^a - e^b}{a-b}.}$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, c) \in \mathbb{R}^2$. D'après 4.b), on a

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & cpa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} & c\sum_{p=0}^{n} \dfrac{pa^{p-1}}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} & c\sum_{p=1}^{n} \dfrac{a^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} & c\sum_{p=0}^{n-1} \dfrac{a^p}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^{n} \dfrac{a^p}{p!} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\alpha_n = \varphi_n(a) \text{ et } \gamma_n = c\varphi_{n-1}(a).$$

La question b) permet d'affirmer que les suites (α_n) et (γ_n) convergent et que ces suites ont pour limites respectives

$$\boxed{\alpha = e^a \text{ et } \gamma = ce^a.}$$

6. **a)** D'après 5.b), l'image par f de la matrice nulle 0_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. En particulier, $f(0_2) \neq 0_2$ et donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas linéaire.}}$$

b) Soient $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^6$ puis $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ tels que $f(A_1) = f(A_2)$.

On a déjà dans tous les cas $e^{a_1} = e^{a_2}$ et $e^{b_1} = e^{b_2}$ ce qui fournit $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Maintenant

• si de plus $a_1 \neq b_1$ alors $a_2 \neq b_2$ et l'égalité $f(A_1) = f(A_2)$ impose $c_1\dfrac{e^{a_1} - e^{b_1}}{a_1 - b_1} = c_2\dfrac{e^{a_2} - e^{b_2}}{a_2 - b_2}$ et finalement $c_1 = c_2$ car $\dfrac{e^{a_1} - e^{b_1}}{a_1 - b_1} = \dfrac{e^{a_2} - e^{b_2}}{a_2 - b_2} \neq 0$.

• si par contre $a_1 = b_1$ alors $a_2 = b_2$ et l'égalité $f(A_1) = f(A_2)$ impose $c_1e^{a_1} = c_2e^{a_2}$ et finalement $c_1 = c_2$ car $e^{a_1} = e^{a_2} \neq 0$.

On a montré que

$$\forall (A_1, A_2) \in E^2,\ (f(A_1) = f(A_2) \Rightarrow A_1 = A_2$$

et donc que

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

c) Pour tout élément A de E, les coefficients diagonaux de $f(A)$ sont des réels strictement positifs. Donc par exemple, la matrice nulle (qui est un élément de E) n'a pas d'antécédent par f dans E.

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$$

d) D'après ce qui précède, on a $f(E) \subset G$. Montrons que l'on a aussi $G \subset f(E)$.

Soit A' un élément quelconque de G. Posons $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ où a', b' et c' sont trois réels tels que $a' > 0$ et $b' > 0$.

• si $a' \neq b'$, posons $a = \ln a'$, $b = \ln b'$ et $c = c'\dfrac{\ln a' - \ln b'}{a' - b'}$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Alors $a \neq b$ et

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^a & c\dfrac{e^a - e^b}{a - b} \\ 0 & e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c'\dfrac{\ln a' - \ln b'}{a' - b'}\dfrac{a' - b'}{\ln a' - \ln b'} \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = A'.$$

Dans ce premier cas, on a trouvé un élément A de E tel que $f(A) = A'$.

• si $a' = b'$, posons $a = \ln a'$ et $c = \dfrac{c'}{a'}$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Alors

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & \dfrac{c'}{a'}a' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = A'.$$

Dans ce deuxième cas, on a aussi trouvé un élément A de E tel que $f(A) = A'$.

On a montré que $\forall A' \in G,\ \exists A \in E/\ f(A) = A'$ et donc que $G \subset f(E)$. Finalement

$$\boxed{f(E) = G.}$$

7. a) Premier cas. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. On a déjà $A' - I = \begin{pmatrix} e^a - 1 & c\dfrac{e^a - e^b}{a - b} \\ 0 & e^b - 1 \end{pmatrix}$. Comme $a \neq b$, on a $e^a - 1 \neq e^b - 1$ et d'après la question 4.a)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (A' - I)^p = \begin{pmatrix} (e^a - 1)^p & c\dfrac{(e^a - 1)^p - (e^b - 1)^p}{a - b} \\ 0 & (e^b - 1)^p \end{pmatrix}.$$

Mais alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(e^a - 1)^p,\ b_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(e^b - 1)^p$$

et

$$c_n = \frac{c}{a - b}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(e^a - 1)^p - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(e^b - 1)^p\right).$$

Deuxième cas. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$. On a déjà $A' - I = \begin{pmatrix} e^a - 1 & ce^a \\ 0 & e^a - 1 \end{pmatrix}$. D'après la question 4.b)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (A' - I)^p = \begin{pmatrix} (e^a - 1)^p & ce^a p(e^a - 1)^{p-1} \\ 0 & (e^a - 1)^p \end{pmatrix}.$$

Mais alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(e^a - 1)^p,\ \text{et } c_n = ce^a \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}(e^a - 1)^{p-1}.$$

b) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $]0, 1[$. Soit I l'intervalle $[0, x]$. Pour $t \in I$, posons $f(t) = \ln(1 + t)$. f est de classe C^{n+1} sur I. On a déjà

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \frac{1}{1 + t}.$$

Mais alors, on obtient facilement par récurrence :

$$\forall k \in [\![1, n + 1]\!],\ \forall t \in I,\ f^{(k)}(t) = (f')^{(k-1)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k - 1)!}{(1 + t)^k}.$$

En particulier, pour tout réel t de I, on a

$$|f^{(n+1)}(t)| = \left|\frac{(-1)^n(n)!}{(1 + t)^{n+1}}\right| = \frac{n!}{(1 + t)^{n+1}} \leq n!.$$

D'autre part, $f(0) = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(k - 1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = 0$, $b = x$ et $M = n!$. On obtient

$$\left|\ln(1 + x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \leq n! \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n + 1}$ tend vers 0 et on a donc montré que

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[,\ \lim_{n \to +\infty} \psi_n(x) = \ln(1 + x).}$$

c) Puisque $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$ on a $0 < e^a - 1 < 1$ et $0 < e^b - 1 < 1$. On peut donc appliquer ce qui précède au réel $x = e^a - 1$ ou au réel $x = e^b - 1$. Dans tous les cas, on a pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \psi_n(e^a - 1)$ et $b_n = \psi_n(e^b - 1)$. Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers $\ln(1 + (e^a - 1)) = a$ et $\ln(1 + (e^b - 1)) = b$.

Ensuite, si $a \neq b$, pour tout entier naturel non nul n on a $c_n = \dfrac{c}{a - b}(\psi_n(a) - \psi_n(b))$. Dans ce cas, la suite (c_n) converge vers

$$\frac{c}{a - b}\left(\ln(1 + (e^a - 1)) - \ln(1 + (e^b - 1))\right) = \frac{c}{a - b}(a - b) = c.$$

Mais si $a = b$, pour tout entier naturel non nul n on a

$$\begin{aligned} c_n &= ce^a \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}(e^a - 1)^{p-1} = ce^a \sum_{p=0}^{n-1} (1 - e^a)^p \\ &= ce^a \frac{1 - (1 - e^a)^n}{1 - (1 - e^a)}\ (a > 0 \Rightarrow e^a > 1 \Rightarrow 1 - e^a \neq 0) \\ &= c(1 - (1 - e^a)^n) \end{aligned}$$

Maintenant $0 < a < \ln 2 \Rightarrow -1 < 1 - e^a < 0$ et donc la suite (c_n) converge vers c.
Finalement dans tous les cas,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = a,\ \lim_{n \to +\infty} b_n = b \text{ et } \lim_{n \to +\infty} c_n = c.}$$

