CONCOURS COMMUN 2004

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

ANALYSE

PREMIERE PARTIE

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

Pour $x \in]-\infty, 1[$, $\dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+1-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Une primitive de a sur I est donc la fonction définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I},\ A(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}.}$$

2. Soit g une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ g'(x) - a(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ e^{-A(x)}g'(x) - a(x)e^{-A(x)}g(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ (e^{-A}g)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in \mathrm{I},\ e^{-A(x)}g(x) = C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in \mathrm{I},\ g(x) = Ce^{A(x)} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in \mathrm{I},\ g(x) = C\frac{1}{1-x}e^{1/(1-x)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } (\mathrm{I}) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto C\frac{1}{1-x}e^{1/(1-x)},\ C \in \mathbb{R}.}$$

3. Quand x tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x}e^{1/(1-x)} \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))e^{1+x+x^2+x^3+o(x^3)} = e(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))e^{x+x^2+x^3+o(x^3)} \\
&= e\left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(1 + (x + x^2 + x^3) + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{6}(x)^3\right) + o(x^3) \\
&= e\left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3\right) + o(x^3) \\
&= e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o(x^3).}$$

DEUXIEME PARTIE

4. f est de classe C^∞ sur I en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur I.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons alors $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « il existe un polynôme P_n tel que, pour tout réel x de I, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{1/(1-x)}$ ». Montrons cette propriété par récurrence.

• Vérifions tout d'abord que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie. Pour tout réel x de I, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x}e^{1/(1-x)}$.
$(\mathcal{P}_0)$ est donc vérifiée en prenant $P_0 = X$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifiée et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est. En dérivant $f^{(n)}$ une fois de plus, on obtient pour tout réel x de I :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{1/(1-x)}\right)'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{1/(1-x)} + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{1}{(1-x)^2}e^{1/(1-x)}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2}\left(P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)e^{1/(1-x)}.$$

Posons alors, $P_{n+1} = X^2(P'_n + P_n)$. P_{n+1} est un polynôme tel que, pour tout réel x de I, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{1/(1-x)}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$.

On a montré par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Au passage, on a obtenu une relation vérifiée par la suite de polynômes (P_n)

$$\boxed{P_0 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = X^2(P'_n + P_n).}$$

5. $P_0 = X$. $P_1 = X^2(P'_0 + P_0) = X^3 + X^2$. $P_2 = X^2(P'_1 + P_1) = X^2(3X^2 + 2X + X^3 + X^2) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.
$P_3 = X^2(P'_2 + P_2) = X^2(5X^4 + 16X^3 + 6X^2 + X^5 + 4X^4 + 2X^3) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$.

$$\boxed{P_0 = X,\ P_1 = X^3 + X^2,\ P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3 \text{ et } P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4.}$$

6. Soit n un entier naturel non nul.
Puisque f est l'une des solutions de l'équation (E) sur I, pour tout réel x de I, on a $(1-x)^2f'(x) = (2-x)f(x)$. Dérivons n fois cette égalité. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x de I :

$$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x).$$

puis,

$$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) = (-(2n+1)x + 2n + 2)f^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x),$$

ou enfin, après division des deux membres par $(1-x)^2$, puis simplification par le réel non nul $e^{1/(1-x)}$,

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{-(2n+1)x + 2n + 2}{(1-x)^2}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{n^2}{(1-x)^2}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad (*).$$

Maintenant, en posant $y = \dfrac{1}{1-x}$ ou encore $x = 1 - \dfrac{1}{y}$,

$$\frac{-(2n+1)x + 2n + 2}{(1-x)^2} = \frac{-(2n+1)\left(1 - \dfrac{1}{y}\right) + 2n + 2}{\left(\dfrac{1}{y}\right)^2} = -(2n+1)(y^2 - y) + (2n+2)y^2$$
$$= (2n+1)y + y^2.$$

Enfin, quand x décrit $]-\infty, 1[$, y décrit $]0, +\infty[$. $(*)$ s'écrit donc

$$\forall y > 0,\ P_{n+1}(y) = ((2n+1)y + y^2)P_n(y) - n^2y^2P_{n-1}(y).$$

Les deux polynômes ci-dessus coïncident en une infinité de valeurs de la variable. Ils sont donc égaux. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(X) = ((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X) \quad (**).}$$

TROISIEME PARTIE

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_n = f^{(n)}(0) = eP_n(1)$.
On multiplie donc les deux membres de l'égalité $(**)$ par e, puis on évalue en 1. On obtient : $a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}.}$$

8. **a)** On sait que les coefficients du développement limité obtenu à la question 3. sont respectivement $f(0)$, $f'(0)$, $\dfrac{f''(0)}{2}$ et $\dfrac{f^{(3)}(0)}{6}$. Donc $a_0 = e$, $a_1 = 2e$, $a_2 = 7e$ et $a_3 = 34e$. Enfin, $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209e$.
b) La formule de Taylor-Young fournit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + \frac{209e}{24}x^4 + o(x^4).}$$

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Laplace,

$$e = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}e^t\,dt = u_p + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}e^t\,dt.$$

Or,

$$\left|\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}e^t\,dt\right| = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p e^t\,dt \leqslant \frac{e}{p!}\int_0^1 (1-t)^p\,dt = \frac{e}{(p+1)!}.$$

Comme $\dfrac{e}{(p+1)!}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}e^t\,dt$. On a ainsi montré que quand p tend vers $+\infty$, u_p tend vers e.

10. **a)** Soit $p \in \mathbb{N}$. $S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p$. Ensuite, pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} S_p(1) &= \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} \\ &= u_{p-1} + u_p \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ S_p(0) = u_p \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_p(1) = u_p + u_{p-1}.}$$

b) Quand p tend vers $+\infty$, $S_p(0)$ tend vers e et $S_p(1)$ tend vers $e + e = 2e$.

11. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$$S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)+S_p(n)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+1+i)!-(2n+1)(n+i)!+n^2(n-1+i)!}{(i!)^2}$$
$$=\sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!((n+1+i)(n+i)-(2n+1)(n+i)+n^2)}{(i!)^2}=\sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!\times i^2}{(i!)^2}$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{(n+(i-1))!}{((i-1)!)^2}=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}=S_{p-1}(n)$$

Donc

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)=S_{p-1}(n)-S_p(n).}$$

12. Montrons par récurrence $\boxed{\text{sur } n}$, que pour tout naturel n, la suite $p\mapsto S_p(n)$ converge.

- Pour $n=0$ et $n=1$, on sait, d'après 10., que les suites $p\mapsto S_p(0)$ et $p\mapsto S_p(1)$ convergent.
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons que les deux suites $p\mapsto S_p(n-1)$ et $p\mapsto S_p(n)$ convergent. Alors, puisque pour tout naturel non nul p, on a

$$S_p(n+1)=(2n+2)S_p(n)-n^2S_p(n-1)+S_{p-1}(n)-S_p(n),$$

  on en déduit que la suite $p\mapsto S_p(n+1)$ converge.

On a montré par récurrence que pour tout naturel n, la suite $p\mapsto S_p(n)$ converge.

13. Notons ℓ_n la limite de la suite $p\mapsto S_p(n)$. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 11.. On obtient pour tout entier naturel non nul n, $\ell_{n+1}=(2n+2)\ell_n-n^2\ell_{n-1}$.
Ainsi, $\ell_0=e=a_0$ et $\ell_1=2e=a_1$, puis si pour un entier naturel non nul n, $\ell_{n-1}=a_{n-1}$ et $\ell_n=a_n$, alors

$$\ell_{n+1}=(2n+2)\ell_n-n^2\ell_{n-1}=(2n+2)a_n-n^2a_{n-1}=a_{n+1}\ \text{(d'après 7.)}.$$

On a montré par récurrence que, pour tout naturel n, $\ell_n=a_n$, et donc que

$$a_n=\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}.$$

Enfin, $\dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}=\dfrac{(n+i)!}{n!i!}\dfrac{n!}{i!}=n!\dbinom{n+i}{i}\dfrac{1}{i!}$, et on a aussi $a_n=\lim\limits_{p\to+\infty}n!\sum\limits_{i=0}^{p}\dbinom{n+i}{n}\dfrac{1}{i!}$.

FIN DU PROBLEME D'ANALYSE

ALGEBRE ET GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE

1. $f(\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{u}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'image du vecteur $\overrightarrow{X} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est le vecteur $\overrightarrow{X}' = y\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ et si la somme des coordonnées de $\overrightarrow{X}$ est nulle, il en est de même de la somme des coordonnées de $\overrightarrow{X}'$. On en déduit que Q est stable par f.

2. a) On a $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \wedge (\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{k}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$. Puisque $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs du plan Q. Ces deux vecteurs étant clairement non colinéaires, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de Q.

b) $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas orthonormée. Néanmoins, puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et non nuls et que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthogonale directe de $\overrightarrow{E}$.

c)

$$f(\overrightarrow{v}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \frac{1}{2}\overrightarrow{k}) - \frac{3}{4}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{w}$$

et

$$f(\overrightarrow{w}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \frac{1}{2}\overrightarrow{k}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{v} - \frac{1}{2}\overrightarrow{w}.$$

Par suite, $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$ convient.

d) La base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$ est une base directe de $\overrightarrow{E}$. Donc, si le plan Q est orienté par le vecteur normal $\overrightarrow{u}$, la base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe de Q. De plus, la base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est orthogonale et les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont même norme. Ainsi, Q étant orienté par le vecteur $\overrightarrow{u}$, la restriction de f à Q est la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

DEUXIEME PARTIE

3. a)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}.$$

b)

$$P\overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 3 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 1+j+j^2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I.$$

4. a) $JX_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1$. Puis, $JX_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{bmatrix} = jX_2$

et enfin, $JX_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{bmatrix} = j^2X_3$.

b) Il revient au même de dire que

$$JP = [X_1\ jX_2\ j^2X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{bmatrix} = P \times \mathrm{diag}(1, j, j^2).$$

5. a) Déjà $J^2 = (E_{3,1}+E_{1,2}+E_{2,3})(E_{3,1}+E_{1,2}+E_{2,3}) = E_{3,2}+E_{1,3}+E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ensuite, pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $(aI+bJ+cJ^2)J = aJ+bJ^2+cJ^3 = J(aI+bJ+cJ^2)$. Donc, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $aI+bJ+cJ^2 \in C(J)$ ou encore $\mathrm{Vect}(I, J, J^2) \subset C(J)$.

Réciproquement, soit $M \in C(J)$. Posons $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. On a

$$MJ = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

et

$$JM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Par suite, $MJ = JM \Leftrightarrow a_1 = b_2 = c_3$ et $c_1 = a_2 = b_3$ et $b_1 = c_2 = a_3$. Par suite, il existe trois complexes a, b et c tels que

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = aI + bJ + cJ^2 \in \mathrm{Vect}(I, J, J^2).$$

Finalement,

$$\boxed{C(J) = \mathrm{Vect}(I, J, J^2).}$$

b) La famille (I, J, J^2) est déjà une famille génératrice de $C(J)$, ce qui montre que $C(J)$ est de dimension au plus 3. Montrons que la famille (I, J, J^2) est libre.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

$$aI + bJ + cJ^2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

La famille (I, J, J^2) est libre et donc une base de $C(J)$. Par suite, $\dim(C(J)) = 3$.

$$\boxed{\dim(C(J)) = 3 \text{ et une base de } C(J) \text{ est } (I, J, J^2).}$$

6. **a)** D'après 3)b), P est inversible, d'inverse $\mathsf{P}^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{\mathsf{P}}$. D'après 4)b), $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{P} = \Delta = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$. Mais alors, $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{J}^2\mathsf{P} = (\mathsf{P}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{P})(\mathsf{P}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{P}) = \Delta^2 = \mathrm{diag}(1, j^2, j)$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^{-1}\mathsf{M}(a,b,c)\mathsf{P} &= \mathsf{P}^{-1}(a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{J}^2)\mathsf{P} = a\mathrm{I} + b\mathsf{P}^{-1}\mathrm{J}\mathsf{P} + c\mathsf{P}^{-1}\mathrm{J}^2\mathsf{P} = a\mathrm{I} + b\Delta + c\Delta^2\\ &= \mathrm{diag}(a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj).\end{aligned}$$

b) Le déterminant de $\mathsf{M}(a,b,c)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix} = a(a^2-bc) - c(ab-c^2) + b(b^2-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

D'autre part, $\det(\mathsf{D}(a,b,c)) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$

c) Maintenant

$$\begin{aligned}\det(\mathsf{M}(a,b,c)) &= \det(\mathsf{P}\mathsf{D}(a,b,c)\mathsf{P}^{-1}) = \det(\mathsf{P}\mathsf{D}(a,b,c))\det(\mathsf{P}^{-1})\\ &= \det(\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\mathsf{D}(a,b,c)) = \det(\mathsf{D}(a,b,c))\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\det(\mathsf{M}(a,b,c)) = a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj).}$$

d) O est centre de gravité de $(\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{C})$ si et seulement si $\dfrac{1}{3}(a+b+c) = 0$ ou encore $a+b+c=0$.

$$\begin{aligned}(\mathsf{T})\text{ équilatéral} &\Leftrightarrow \mathsf{C} = r_{\mathsf{A},\frac{\pi}{3}}(\mathsf{B}) \text{ ou } \mathsf{C} = r_{\mathsf{A},-\frac{\pi}{3}}(\mathsf{B})\\ &\Leftrightarrow c-a = -j^2(b-a) \text{ ou } c-a = -j(b-a)\\ &\Leftrightarrow (-1-j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1-j)a + jb + c = 0\\ &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \text{ ou } a + j^2b + jc = 0\\ &\Leftrightarrow (a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = 0\end{aligned}$$

Finalement, A est non inversible si et seulement si $\det(\mathsf{M}(a,b,c)) = 0$ ce qui équivaut à $a+b+c=0$ ou $(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = 0$ ou encore à (T) est équilatéral ou O est centre de gravité de (T).

TROISIEME PARTIE

7. Les égalités $a_{n+1} = \lambda b_n + (1-\lambda)c_n$, $b_{n+1} = \lambda c_n + (1-\lambda)a_n$ et $c_{n+1} = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n$ fournissent

$$\begin{aligned}\mathsf{Z}_{n+1} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Y}_{n+1} = \mathsf{P}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda b_n + (1-\lambda)c_n\\ \lambda c_n + (1-\lambda)a_n\\ \lambda a_n + (1-\lambda)b_n\end{bmatrix} &= \mathsf{P}^{-1}\begin{bmatrix}0 & \lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 0 & \lambda\\ \lambda & 1-\lambda & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}\\ &= \mathsf{P}^{-1}(\lambda\mathrm{J} + (1-\lambda)\mathrm{J}^2)\mathsf{P}\mathsf{Z}_n = \mathsf{D}(0,\lambda,1-\lambda)\mathsf{Z}_n \text{ (d'après 6)a)).}\end{aligned}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\mathsf{D}(0,\lambda,1-\lambda))^n &= \left(\mathrm{diag}(1, \lambda j + (1-\lambda)j^2, \lambda j^2 + (1-\lambda)j)\right)^n\\ &= \mathrm{diag}(1, (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n, (\lambda j^2 + (1-\lambda)j)^n).\end{aligned}$$

9. **a)** $\lambda j+(1-\lambda)j^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1-j^2}{j-j^2}=\dfrac{1+j}{j}=1+j^2=-j$ qui n'est pas réel.
Donc $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda j+(1-\lambda)j^2\neq 1$.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$|\lambda j+(1-\lambda)j^2|^2=(\lambda j+(1-\lambda)j^2)(\lambda j^2+(1-\lambda)j)=\lambda^2+(1-\lambda)^2-\lambda(1-\lambda)=3\lambda^2-3\lambda+1.$$

Par suite,

$$|\lambda j+(1-\lambda)j^2|<1\Leftrightarrow 3\lambda^2-3\lambda+1<1\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)<0\Leftrightarrow \lambda\in]0,1[.$$

$$\boxed{\forall\lambda\in\mathbb{R},\ (\text{la suite } ((\lambda j+(1-\lambda)j^2)^n) \text{ converge si et seulement si } \lambda\in]0,1[).}$$

b) Pour tout entier naturel n, d'après 7), $Z_{n+1}=D(0,\lambda,1-\lambda)Z_n$ et donc, pour tout entier naturel n, d'après 8),

$$Z_n=(D(0,\lambda,1-\lambda))^nY_0=\text{diag}(1,(\lambda j+(1-\lambda)j^2)^n,(\lambda j^2+(1-\lambda)j)^n)Z_0$$

Si $\lambda\in]0,1[$, les suites $((\lambda j+(1-\lambda)j^2)^n)$ et $((\lambda j^2+(1-\lambda)j)^n)=(\overline{(\lambda j+(1-\lambda)j^2)^n})$ convergent d'après 9)a) et donc les trois composantes du vecteur Z_n, $n\in\mathbb{N}$, convergent. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, $Y_n=PZ_n$, les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont des combinaisons linéaires des trois composantes de la suite (Z_n) et donc convergent.

10. **a)** Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=(\lambda b_n+(1-\lambda)c_n)+(\lambda c_n+(1-\lambda)a_n)+(\lambda a_n+(1-\lambda)b_n)=a_n+b_n+c_n.$$

Par suite, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=a+b+c$.
b) On sait déjà que, si $\lambda\in]0,1[$, les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent. Notons ℓ, ℓ' et ℓ'' leurs limites respectives.
On passe à la limite dans la relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n et c_n. On obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\ell=\lambda\ell'+(1-\lambda)\ell''\\ \ell'=\lambda\ell''+(1-\lambda)\ell\\ \ell''=\lambda\ell+(1-\lambda)\ell'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\ell''=\lambda\ell+(1-\lambda)\ell'\\ \ell=\lambda\ell'+(1-\lambda)(\lambda\ell+(1-\lambda)\ell')\\ \ell'=\lambda(\lambda\ell+(1-\lambda)\ell')+(1-\lambda)\ell\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\ell''=\lambda\ell+(1-\lambda)\ell'\\ (\lambda^2-\lambda+1)(\ell-\ell')=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \ell=\ell'=\ell'',$$

(car $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda^2-\lambda+1\neq 0$). Les trois suites ont donc mêmes limites. Notons ℓ cette limite.
c) Pour tout entier naturel n, on a $a_n+b_n+c_n=a+b+c$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $3\ell=a+b+c$ ou encore

$$\boxed{\ell=\frac{1}{3}(a+b+c)=\text{isobar}(a,b,c).}$$

FIN DU PROBLEME D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

