

# CONCOURS COMMUN 2003

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

**Épreuve spécifique de Mathématiques**  
(filière MPSI)

**Jeudi 22 mai 2003 de 8h00 à 12h00**

### **Instructions générales :**

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend : 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

**L'emploi d'une calculatrice est interdit**

Barème indicatif :

Premier problème environ 1/2 - Deuxième problème environ 1/2

### **Premier problème**

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels.

Dans tout le problème  $\alpha$  désigne un réel strictement supérieur à 1.

On pose :  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx$ .

L'objectif du problème est le calcul de l'intégrale  $I(\alpha)$ .

On rappelle que pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  on a les formules :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

## I. Quelques résultats préliminaires

Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

Pour  $x \in ]0, \pi]$  et pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose :  $g_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ .

1) Etablir la formule :  $\forall x \in ]0, \pi], f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)$ .

On pourra, pour ce faire, s'intéresser à la quantité  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)f_n(x)$ .

2) a) En déduire que  $g_n$  est prolongeable en une application continue sur  $[0, \pi]$ .

On note encore  $g_n$  l'application ainsi prolongée.

b) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose :  $u_n = \int_0^\pi g_n(x) dx$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante et préciser sa valeur.

3) Soit  $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in ]0, \pi], g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$  et  $g(0) = 0$ .

a) Prouver que  $g$  est continue en 0.

b) Etablir l'existence et déterminer la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g'(x)$ .

c) Etablir que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$  et préciser  $g'(0)$ .

## II. Etude d'une suite

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$ .

4) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose  $v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) dx$ .

Montrer qu'il existe  $A$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$ .

On pourra, pour ce faire, effectuer une intégration par parties.

5) Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}$ .

Montrer que la suite  $(X_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

6) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k} \right]$ .

## III. Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

On adopte la notation  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  et pour  $t \in ]0, 1]$  on pose :  $\varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t}$  et  $\psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$ .

7) a) Justifier l'existence de  $I(\alpha)$ .

b) Montrer que les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont intégrables sur  $]0, 1]$ .

Dans toute la suite on pose :  $J(\beta) = \int_0^1 \varphi(t) dt$  et  $K(\beta) = \int_0^1 \psi(t) dt$ .

8) a) Montrer que :  $\forall a \in ]0,1[$ ,  $\int_a^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{a^\alpha}^1 \varphi(t) dt$ . On pourra poser  $t = x^\alpha$ .

En déduire la formule :  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta J(\beta)$ .

b) Montrer que :  $\forall A \in ]1,+\infty[$ ,  $\int_1^A \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t) dt$ .

En déduire la formule :  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta K(\beta)$ .

9) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $t$  dans  $\mathbb{R}$  on pose :  $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$ .

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $t$  dans  $]0,1[$  on pose :  $\varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1}$  et  $\psi_n(t) = \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta}$ .

a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t \in [0,1]$ ,  $\left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}$ .

b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t \in ]0,1[$ ,  $|\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t)$  et  $|\psi_n(t)| \leq 2\psi(t)$ .

c) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$   $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sont intégrables sur  $]0,1[$ .

10) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $J_n(\beta) = \int_0^1 \varphi_n(t) dt$  et  $K_n(\beta) = \int_0^1 \psi_n(t) dt$ .

a) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\beta) = J(\beta)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\beta) = K(\beta)$ .

b) Exprimer  $J_n(\beta) + K_n(\beta)$  à l'aide de  $X_n$  et de  $\alpha$ .

c) Montrer que :  $I(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$ .

## Second Problème

$\mathbb{R}$  désigne le corps des nombres réels et  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes.

$M_2(\mathbb{C})$  désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

On pose :  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  et  $L = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ .

### I. Etude d'une symétrie

On notera bien, que dans toute cette partie,  $M_2(\mathbb{C})$  est muni de sa structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dans  $M_2(\mathbb{C})$  on pose :  $\sigma(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  et  $\tau(A) = a + d$ .

11) a) Montrer que  $\sigma$  est une symétrie du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{C})$ .

b) Etablir que  $(I, J, K, L)$  est une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{C})$  puis donner la matrice de l'endomorphisme  $\sigma$  dans cette base.

12) On considère  $A$  et  $B$  dans  $M_2(\mathbb{C})$ .

a) Montrer que :  $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$ .

b) Justifier l'égalité :  $A\sigma(A) = \det(A) I$ .

c) Montrer que si  $A$  est inversible alors  $\sigma(A)$  l'est aussi.

Exprimer les matrices  $\sigma(A)^{-1}$  et  $\sigma(A^{-1})$  en fonction de  $A$ .

- 13) a) Vérifier que  $\tau$  est une forme linéaire sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{C})$ .  
 b) Soit  $A$  dans  $M_2(\mathbb{C})$ . Exprimer  $\sigma(A)$  à l'aide des matrices  $A, I$  et du complexe  $\tau(A)$ .

## II. Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie,  $M_2(\mathbb{C})$  est muni de sa structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre.

A tout couple  $(z_1, z_2)$  de nombres complexes on associe la matrice  $M(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$ .

On désigne par  $H$  l'ensemble des matrices de  $M_2(\mathbb{C})$  de la forme  $M(z_1, z_2)$ , le couple  $(z_1, z_2)$  décrivant  $\mathbb{C}^2$ .

- 14) a) Montrer que toute matrice de  $H$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$  où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des réels.  
 b) En déduire que  $H$  est un sous espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{C})$ .  
 Préciser une base et la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H$ .  
 c) Montrer que  $H$  est stable pour le produit matriciel.  
 d) Montrer que  $H$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre. La  $\mathbb{R}$ -algèbre  $H$  est-elle commutative ?
- 15) a) Vérifier que :  $\forall A \in H, \sigma(A) \in H$  et  $\det(A) \in \mathbb{R}^+$ .  
 b) Montrer qu'une matrice non nulle de  $H$  est inversible et que son inverse est dans  $H$ .  
 c) Vérifier que  $(H \setminus \{0\}, \times)$  est un groupe.
- 16) Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.  
 On pourra exprimer  $\det(M(z_1, z_2))$  comme une somme de quatre carrés de réels.

## III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour  $A$  et  $B$  dans  $H$  on pose :  $(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$ .

- 17) On considère  $A$  et  $B$  dans  $H$ .  
 a) Prouver que  $(A | B) \in \mathbb{R}$ . On pourra utiliser la question 5)a).  
 b) Montrer que  $(A | A) = \det(A)$ .  
 c) Etablir que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H$ .
- 18) Vérifier que  $(I, J, K, L)$  est une base orthonormale de  $H$ .
- 19) On pose  $F = \{A \in H \mid \tau(A) = 0\}$ .  
 a) Montrer que  $F$  est un hyperplan du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H$ . En donner une base.  
 b) Montrer que :  $F^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  
 c) On désigne par  $\pi$  la projection orthogonale sur  $F$ .  
 Montrer que :  $\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$ .

**FIN DU SUJET**