CONCOURS COMMUN 2003

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Premier problème

I. Quelques résultats préliminaires

1) Soient $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sin\frac{x}{2} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{(somme télescopique)}$$

Maintenant, si $x \in]0, \pi]$, $\frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0, \pi],\ f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x).}$$

2) a) Pour tout réel $x \in]0, \pi]$, on a $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ et donc g_n est continue sur $]0, \pi]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, \pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \pi]$.

De plus, quand x tend vers 0, $g_n(x) = 2f_n(x) + 1$ tend vers le réel $2n+1$. Donc, g_n se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 2n+1$. La fonc tion g_n ainsi définie est continue sur $[0, \pi]$ (pour tout réel x de $[0, \pi]$, $g_n(x) = 2f_n(x) + 1$).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_0^{\pi} g_n(x)\ dx = 2\int_0^{\pi} f_n(x)\ dx + \int_0^{\pi}\ dx$$
$$= \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(kx)\ dx = \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi}$$
$$= \pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} g_n(x)\ dx = \pi.}$$

3) a)

$$g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x \to 0, x > 0}{\sim} \frac{-x^2/(2\alpha^2)}{x/2} = -\frac{x}{\alpha^2}.$$

En particulier, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$. On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$$

b) g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$. De plus, pour $x \in]0,\pi]$, on a

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1\right).\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Or, quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1\right).\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= -\frac{1}{\alpha}(\frac{x}{\alpha} + o(x))(\frac{x}{2} + o(x)) - (-\frac{x^2}{2\alpha^2} + o(x^2))\frac{1}{2}(1 + o(1)) \\ &= -\frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2) \\ &\sim -\frac{x^2}{4\alpha^2},\end{aligned}$$

et donc $g'(x) \sim \dfrac{-x^2/(4\alpha^2)}{x^2/4} = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = -\frac{1}{\alpha^2}.}$$

c) En résumé,

- g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ d'après b),
- g est de plus continue sur $[0,\pi]$ d'après a),
- g' a une limite réelle quand x tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse,

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

En particulier, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'_\alpha(x) == -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

$$\boxed{g'(0) = -\frac{1}{\alpha^2}.}$$

II. Etude d'une suite

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction g et la fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\dfrac{x}{2}\right)$ sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}v_n &= \left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\,dx \\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\,dx \quad (\text{car } g(0) = 0 \text{ et } \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0).\end{aligned}$$

Par suite,

$$|v_n| \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \left|\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\right|\,dx \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |g'(x)|\,dx.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq \frac{A}{2n+1} \text{ où } A = 2\int_0^\pi |g'(x)|\,dx.}$$

5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{(d'après la question 1))}\\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}g_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi]$,

$$f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}g_n(x).$$

Cette dernière égalité reste valable quand $x = 0$ par continuité des fonctions f_n, g_n et g en 0. On peut alors intégrer sur l'intervalle $[0, \pi]$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi g_n(x)\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\left[\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2} \quad \text{(d'après la question 2)b))}\\
&= -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}.}$$

D'après la question 4), v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (X_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2}.}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
X_n &= \int_0^\pi f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left[\cos\left((k+\frac{1}{\alpha})x\right)) + \cos\left((k-\frac{1}{\alpha})x\right)\right]\,dx\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)}\sin\left((k+\frac{1}{\alpha})x\right) + \frac{1}{\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)}\sin\left((k-\frac{1}{\alpha})x\right)\right]_0^\pi\\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}+k\pi\right) - \frac{1}{k\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}-k\pi\right)\right]\\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k\alpha+1}(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - \frac{1}{k\alpha-1}(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right]\\
&= \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1} - \frac{1}{k\alpha-1}\right]
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1} - \frac{1}{k\alpha-1}\right],}$$

et donc aussi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1} - \frac{1}{k\alpha-1}\right]\right) = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2}.}$$

III. Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

7) a) Puisque $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{1+t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$. Maintenant, puisque $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et positive. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc que

$$\boxed{I(\alpha) \text{ existe.}}$$

b) Puisque $\alpha > 1$, on a $0 < \beta < 1$.

• φ est continue sur $]0, 1]$, positive et équivalente en 0 à $t^{\beta-1}$ qui est intégrable sur un voisinage de 0 car $\beta - 1 > -1$. Donc, φ est intégrable sur $]0, 1]$.

• ψ est continue sur $]0, 1]$, positive et équivalente en 0 à $t^{-\beta}$ qui est intégrable sur un voisinage de 0 car $-\beta > -1$. Donc, ψ est intégrable sur $]0, 1]$.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ sont intégrables sur }]0, 1].}$$

8) a) Soit $a \in]0, 1[$. On pose $t = x^\alpha$ et donc $x = t^{1/\alpha} = t^\beta$ puis $dx = \beta t^{\beta-1}dt$. On obtient

$$\int_a^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_{a^\alpha}^1 \frac{1}{1+t}\beta t^{\beta-1}\,dt = \beta\int_{a^\alpha}^1 \varphi(t)\,dt.$$

Quand a tend vers 0, a^α tend vers 0 et donc, les fonctions φ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ étant intégrables sur $]0, 1]$, quand a tend vers 0, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \beta J(\beta).}$$

b) Soit $A > 1$. On pose $t = x^{-\alpha}$ et donc $x = t^{-1/\alpha} = t^{-\beta}$ puis $dx = -\beta t^{-\beta-1}dt$. On obtient

$$\int_1^A \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_1^{A^{-\alpha}} \frac{1}{1+t^{-1}}(-\beta t^{\beta-1})\,dt = \beta\int_{A^{-\alpha}}^1 \frac{t^{-\beta}}{1+t}\,dt = \beta\int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t)\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, $A^{-\alpha}$ tend vers 0 et donc, la fonction ψ étant intégrable sur $]0, 1]$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \beta K(\beta).}$$

Par la relation de Chasles, on a encore

$$\boxed{I(\alpha) = \beta(J(\beta) + K(\beta)).}$$

9) **a)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$.

$$\left|\sigma_n(t) - \frac{1}{1+t}\right| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} - \frac{1}{1+t}\right| = \frac{|(-1)^n t^{n+1}|}{1+t} = \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1]$. On a

$$|\sigma_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \frac{|1-(-t)^{n+1}|}{1+t} \leq \frac{1+|(-t)^{n+1}|}{1+t} = \frac{1+t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t},$$

et donc

$$|\varphi_n(t)| = t^{\beta-1}\,|\sigma_n(t)| \leq 2\frac{t^{\beta-1}}{1+t} = 2\varphi(t),$$

et

$$|\psi_n(t)| = t^{-\beta}\,|\sigma_n(t)| \leq 2\frac{t^{-\beta}}{1+t} = 2\psi(t).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,1],\ |\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t) \text{ et } |\psi_n(t)| \leq 2\psi(t).}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions φ_n et ψ_n sont continues sur $]0, 1]$. De plus, d'après la question précédente, $|\varphi_n| \leq 2\varphi$ et $|\psi_n| \leq 2\psi$. Les fonctions 2φ et 2ψ étant intégrables sur $]0, 1]$ d'après la question 7)b), on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n \text{ et } \psi_n \text{ sont intégrables sur }]0,1].}$$

10) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9)a), on a

$$|J_n(\beta) - J(\beta)| = \int_0^1 \left|\sigma_n(t) - \frac{1}{1+t}\right| t^{\beta-1}\,dt \leq \int_0^1 t^{n+1}t^{\beta-1}\,dt = \int_0^1 t^{n+\beta}\,dt = \frac{1}{n+\beta+1}.$$

et de même

$$|K_n(\beta) - K(\beta)| = \int_0^1 \left|\sigma_{n-1}(t) - \frac{1}{1+t}\right| t^{-\beta}\,dt \leq \int_0^1 t^n t^{-\beta}\,dt = \int_0^1 t^{n-\beta}\,dt = \frac{1}{n-\beta+1}\ (0 < \beta < 1 \text{ fournit } 0 < 1-\beta < 1).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+\beta+1}$ et $\dfrac{1}{n-\beta+1}$ tendent vers 0 et on a donc montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n(\beta) = J(\beta) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} K_n(\beta) = K(\beta).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
J_n(\beta) + K_n(\beta) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) t^{\beta-1}\,dt + \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\right) t^{-\beta}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k+\beta-1}\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 t^{k-\beta}\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+\beta} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k-\beta+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+\frac{1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k-\frac{1}{\alpha}+1} = \alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{1+k\alpha} - \alpha\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{1-\alpha(k+1)} \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{1+k\alpha} - \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{1}{1-\alpha k} = \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left[\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-\alpha k}\right] \\
&= \alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n \text{ (d'après la question 6)).}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n(\beta) + K_n(\beta) = \alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n.}$$

c) D'après les questions 8), 10)a), 10)b) puis 5)

$$\begin{aligned}
I(\alpha) = \beta(J(\beta) + K(\beta)) &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \to +\infty} (J_n(\beta) + K_n(\beta)) \\
&= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\left(-\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall \alpha > 1,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^\alpha}\, dt = I(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.}$$

Deuxième problème

I. Etude d'une symétrie

11) **a)** Soients $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\sigma(\lambda A + \lambda' A') = \begin{bmatrix} \lambda d + \lambda' d' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ -(\lambda c + \lambda' c') & \lambda a + \lambda' a' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} = \lambda\sigma(A) + \lambda'\sigma(A').$$

Donc

$$\boxed{\sigma \in L(M_2(\mathbb{C})).}$$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\sigma(\sigma(A)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Donc $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{C})}$. Ainsi, σ est une involution linéaire de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ et donc

$$\boxed{\sigma \text{ est une symétrie du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } M_2(\mathbb{C}).}$$

b) On a déjà $\mathrm{card}((I, J, K, L)) = 4 = \dim(M_2(\mathbb{C})) < +\infty$. Pour montrer que la famille (I, J, K, L) est une base de $M_2(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned}
aI + bJ + cK + dL = 0 &\Rightarrow a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} a - id & -b + ic \\ b + ic & a + id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + id = 0 \\ a - id = 0 \\ b + ic = 0 \\ -b + ic = 0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a + id) + (a - id) = 0 \\ (a + id) - (a - id) = 0 \\ (b + ic) + (-b + ic) = 0 \\ (b + ic) - (-b + ic) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 0 \\ 2id = 0 \\ 2ic = 0 \\ 2b = 0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow a = b = c = d = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (I, J, K, L) est libre et donc

$$\boxed{\text{la famille } (I, J, K, L) \text{ est une base de } M_2(\mathbb{C}).}$$

Ensuite $\sigma(I) = I$, $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(I,J,K,L)}(\sigma) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).}$$

12) **a)** Soients $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma(B)\sigma(A) &= \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dd' + cb' & -bd' - ab' \\ -dc' - ca' & bc' + aa' \end{bmatrix} \\
&= \sigma\left(\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \\
&= \sigma(AB)
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (M_2(\mathbb{C}))^2,\ \sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A).}$$

b) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A\sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)I = \det(A)I.$$

$$\boxed{\forall A \in M_2(\mathbb{C}),\ A\sigma(A) = \det(A)I.}$$

c) Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$ et donc, d'après la question b),

$$\left(\frac{1}{\det(A)}A\right).\sigma(A) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A)$ est inversible à gauche et donc inversible. De plus, $(\sigma(A))^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A$.

Ensuite, d'après a),

$$\sigma(A^{-1})\sigma(A) = \sigma(AA^{-1}) = \sigma(I) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1}$. Finalement,

$$\boxed{\forall A \in GL_2(\mathbb{C}),\ \sigma(A) \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ et } (\sigma(A))^{-1} = \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A.}$$

13) a) Soient $(a,b,c,d,a',b',c',d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ et soit $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\tau(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda a + \lambda' a') + (\lambda d + \lambda' d') = \lambda(a+d) + \lambda'(a'+d') = \lambda\tau(A) + \lambda'\tau(A').$$

Donc

$$\boxed{\tau \text{ est une forme linéaire sur } M_2(\mathbb{C}).}$$

b) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A + \sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} = (a+d)I = \tau(A)I.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall A \in M_2(\mathbb{C}),\ \sigma(A) = -A + \tau(A)I.}$$

II. Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

14) a) • Existence. Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Posons $z_1 = \alpha - i\delta$ et $z_2 = \beta + i\gamma$ où α, β, γ et δ sont quatre réels.

$$\begin{aligned} M(z_1,z_2) &= \begin{bmatrix} \alpha - i\delta & -\beta + i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha + i\delta \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L. \end{aligned}$$

Donc tout élément de H est une combinaison linéaire de I, J, K et L.

• **Unicité**. D'après la question 12)b), la famille (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$. En particulier, si α, β, γ, δ, α', β', γ' et δ' sont 8 réels tels que $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = \alpha' I + \beta' J + \gamma' K + \delta' L$ alors $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ et $\delta = \delta'$ ce qui démontre l'unicité d'une décomposition.

$$\boxed{\text{tout matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme } \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \delta \text{ sont des réels.}}$$

b) Il reste à constater que $I = M(1, 0)$, $J = M(0, 1)$, $K = M(0, i)$ et $L = M(-i, 0)$ sont quatre éléments de H. Ainsi, la famille (I, J, K, L) est une famille d'éléments de H telle que tout élément de H est combinaison linéaire (à coefficients réels) des éléments de cette famille. Donc

$$\boxed{\text{la famille } (I, J, K, L) \text{ est une base du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } H \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}(H) = 4.}$$

c) Soit $(z_1, z_2, z_1', z_2') \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) \times M(z_1', z_2') &= \begin{bmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1' & -\overline{z_2'} \\ z_2' & \overline{z_1'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2' & -z_1 \overline{z_2'} - \overline{z_2}\,\overline{z_1'} \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' & -z_2 \overline{z_2'} + \overline{z_1}\,\overline{z_1'} \end{bmatrix} \\ &= M(z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2', z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2') \in H. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{H est stable pour le produit matriciel.}}$$

d) On suppose acquis le fait que $(M_2(\mathbb{C}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (de dimension 8).

D'après la question 14)b), $H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K, L)$. Par suite, H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H est non vide et stable pour $+$ et .. Ensuite, H est stable pour le produit matriciel d'après la question 14)c). Enfin, H contient I l'élément neutre de $M_2(\mathbb{C})$ pour $\times$.

Donc H est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $(M_2(\mathbb{C}), +, ., \times)$ et en particulier,

$$\boxed{\text{H est une } \mathbb{R}\text{-algèbre.}}$$

$JK = M(0, 1)M(0, i) = M(-i, 0) = L$ et $KJ = M(0, i)M(0, 1) = M(i, 0) = -L$. Donc j et k sont deux éléments de H tels que $JK \neq KJ$ et H n'est pas une algèbre commutative.

15) a) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1 \end{bmatrix} = M(\overline{z_1}, -z_2) \in H.$$

D'autre part,

$$\det(A) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

$$\boxed{\forall A \in H,\ \sigma(A) \in H \text{ et } \det(A) \in \mathbb{R}^+.}$$

b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$A \notin GL_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Ainsi, toute matrice non nulle de H est inversible pour $\times$ dans $M_2(\mathbb{C})$. On sait alors que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\sigma(A)$. Or, d'après la question a), $\sigma(A) \in H$ et donc $\dfrac{1}{\det(A)}\sigma(A) \in H$. Ainsi,

$$\boxed{\text{toute matrice non nulle de H est inversible et son inverse est dans H.}}$$

c) • $H \setminus \{0\}$ est non vide car contient I et $H \subset GL_2(\mathbb{C})$ d'après la question précédente.

• On sait déjà que $\times$ est une loi interne dans H. Plus précisément, puisque tout élément non nul de H est une matrice inversible, le produit de deux matrices non nulles de H est inversible et en particulier non nul ou encore $\mathsf{H}\setminus\{0\}$ est stable pour $\times$.

• D'après la question b), tout élément de $\mathsf{H}\setminus\{0\}$ possède un inverse pour $\times$ dans $\mathsf{H}\setminus\{0\}$.

Finalement $\mathsf{H}\setminus\{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathsf{GL}_2(\mathbb{C}),\times)$ et en particulier

$$\boxed{(\mathsf{H}\setminus\{0\},\times)\text{ est un groupe.}}$$

16) Soit $(a,b,c,d,a',b',c',d')\in\mathbb{Z}^8$ puis $A=M(a-id,b+ic)=aI+bJ+cK+dL$ et $A'=M(a'-id',b'+ic')=a'I+b'J+c'K+d'L$. On a déjà

$$\det(A)=|a-id|^2+|b+ic|^2=a^2+b^2+c^2+d^2\text{ et }\det(A')=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2.$$

D'autre part, d'après la question 14)c)

$$\begin{aligned}AA'&=M(a-id,b+ic)M(a'-id',b'+ic')\\&=M((a-id)(a'-id')-(b-ic)(b'+ic'),(b+ic)(a'-id')+(a+id)(b'+ic'))\\&=M((aa'-bb'-cc'-dd')-i(ad'+bc'-cb'+da'),(ab'+ba'+cd'-dc')+i(ac'-bd'+ca'+db'))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)&=\det(A)\det(A')=\det(AA')\\&=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+(ac'-bd'+ca'+db')^2+(ad'+bc'-cb'+da')^2.\end{aligned}$$

Comme les quatre réels $aa'-bb'-cc'-dd'$, $ab'+ba'+cd'-dc'$, $ac'-bd'+ca'+db'$ et $ad'+bc'-cb'+da'$ sont des entiers relatifs, on a montré que tout produit de deux somme de quatre carrés d'entiers est encore une somme de quatre carrés d'entiers.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

17) a) Soit $(A,B)\in\mathsf{H}^2$. D'après la question 15)a), $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont dans H. Puisque H est une $\mathbb{R}$-algèbre, il en est de même de $A\sigma(B)+B\sigma(A)$. Par suite, il existe deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $A\sigma(B)+B\sigma(A)=M(z_1,z_2)$. On a alors

$$(A|B)=\frac{1}{4}(z_1+\overline{z_1})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(z_1)\in\mathbb{R}.$$

$$\boxed{\forall(A,B)\in\mathsf{H}^2,\ (A|B)\in\mathbb{R}.}$$

b) Soit $A\in\mathsf{H}$. D'après la question 12)b) et puisque τ est linéaire,

$$(A|A)=\frac{1}{4}(A\sigma(A)+\sigma(A)A)=\frac{1}{4}\tau(2\det(A)I)=\frac{1}{4}.2\det(A).\tau(I)=\det(A).$$

$$\boxed{\forall A\in\mathsf{H},\ (A|A)=\det(A).}$$

c) • D'après la question a), $(.|.)$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(A,B)\in\mathsf{H}^2$.

$$(B|A)=\frac{1}{4}(B\sigma(A)+A\sigma(B))=\frac{1}{4}(A\sigma(B)+B\sigma(A))=(A|B).$$

Donc $(.|.)$ est symétrique.

• τ et σ sont linéaires. On en déduit que $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc par symétrie, $(.|.)$ est bilinéaire.

• Soit $A \in H$. D'après les questions 17)b) et 15)a), $(A|A) = \det(A) \in \mathbb{R}^+$. Donc $(.|.)$ est positive.
• Soit $A \in H$ telle que $(A|A) = 0$. Alors, $\det(A) = 0$ et A est un élément non inversible de H. D'après la question 15)b), on a nécessairement $A = 0$. Donc $(.|.)$ est définie.

En résumé, $(.|.)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H et donc

$$\boxed{(.|.) \text{ est un produit scalaire sur } H.}$$

18) Déjà, $\det(I) = \det(J) = \det(K) = \det(L) = 1$ et donc

$$\|I\| = \|J\| = \|K\| = \|L\| = 1.$$

Ensuite, on note que $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$ puis que $JK = -KJ = L$, $KL = -LK = J$ et $LJ = -JL = K$. Puisque τ est linéaire, on a

$(I|J) = \dfrac{1}{4}\tau(-J + J) = \dfrac{1}{4}\tau(0) = 0$ et de même $(I|K) = (I|L) = 0$

et aussi

$(J|K) = \dfrac{1}{4}\tau(-JK - KJ) = \dfrac{1}{4}\tau(0) = 0$ et de même $(J|L) = (K|L) = 0$.

Finalement, puisque (I, J, K, L) est déjà une base de H,

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base orthonormée de } (H, (.|.)).}$$

19) a) τ est une forme linéaire non nulle (car par exemple $\tau(I) = 2 \neq 0$) sur H et F est le noyau de cette forme linéaire non nulle. Donc

$$\boxed{F \text{ est un hyperplan de } H.}$$

On en déduit que $\dim(F) = 4 - 1 = 3$. On note alors que, puisque $\tau(J) = \tau(K) = \tau(L) = 0$, J, K et L sont trois éléments de F. Ainsi, la famille (J, K, L) est une famille libre de F vérifiant de plus $\text{card}(J, K, L) = 3 = \dim(F) < +\infty$. Donc

$$\boxed{\text{une base (orthonormée) de } F \text{ est } (J, K, L).}$$

b) Puisque F est un hyperplan de H, $F^\perp$ est une droite vectorielle. Puisque (I, J, K, L) est une base orthonormée de H, I est une matrice non nulle orthogonale à J, K, L et donc à F. On en déduit que la famille (I) est une base de $F^\perp$ et en particulier que

$$\boxed{F^\perp = \{\alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.}$$

c) Soit $A \in H$. Posons $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où α, β, γ et δ sont quatre réels. Alors

$$\frac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \frac{1}{2}\left((\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L) - (\alpha I - \beta J - \gamma K - \delta L)\right) = \beta J + \gamma K + \delta L.$$

Donc $\dfrac{1}{2}(A - \sigma(A)) \in F$ et d'autre part $A - \dfrac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \alpha I \in F^\perp$. On a montré que

$$\boxed{\forall A \in H,\ \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A)).}$$

