CONCOURS COMMUN 2003

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Problème 1

Partie I

1.- Quand t tend vers $-\infty$, e^t et $\dfrac{1}{1+t^2}$ tendent vers 0. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(t) = 0.}$$

2.- La droite (Ox) est donc asymptote à C_f en $-\infty$.

3.- Puisque $\dfrac{1}{1+t^2}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, $f(t) = e^t.o(1) = o(e^t)$. Donc

$$\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } e^t \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.}$$

Quand t tend vers $+\infty$, $t.\dfrac{1}{1+t^2}$ tend vers 0 et donc $\dfrac{1}{1+t^2} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$ puis $f(t) = o\left(\dfrac{e^t}{t}\right)$. Donc

$$\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } \frac{e^t}{t} \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.}$$

Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^t}{1+t^2} \sim \dfrac{e^t}{t^2}$. Donc

$$\boxed{f(t) \text{ est équivalent à } \frac{e^t}{t^2} \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.}$$

4.- Quand t tend vers $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{e^t}{t^2}$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(t) = +\infty.}$$

5.- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$f'(t) = e^t\frac{1}{1+t^2} + e^t\frac{-2t}{(1+t^2)^2} = \frac{e^t(t^2-2t+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{e^t(t-1)^2}{(t^2+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t) = \frac{e^t(t-1)^2}{(t^2+1)^2}.}$$

6.- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

7.- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$\begin{aligned}
f''(t) &= e^t\frac{(t-1)^2}{(t^2+1)^2} + 2(t-1)e^t\frac{1}{(t^2+1)^2} + e^t(t-1)^2\frac{-4t}{(1+t^2)^3} \\
&= \frac{e^t\left[(t-1)^2(t^2+1) + 2(t-1)(t^2+1) - 4t(t-1)^2\right]}{(t^2+1)^3} = \frac{e^t(t-1)\left[(t-1)(t^2+1) + 2(t^2+1) - 4t(t-1)\right]}{(t^2+1)^3} \\
&= \frac{e^t(t-1)(t^3-3t^2+5t+1)}{(t^2+1)^3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = (t-1)(t^3-3t^2+5t+1)\frac{e^t}{(t^2+1)^3}.}$$

8.- Pour t réel, posons alors $P(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$. P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$P'(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 > 0.$$

P est ainsi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. P réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty} P, \lim\limits_{+\infty} P[= \mathbb{R}$ et en particulier, P s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un certain réel noté α.

Puisque pour tout réel t, $f''(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3-3t^2+5t+1) = 0$, on a montré que l'équation $f''(t) = 0$ possède exactement deux solutions réelles, à savoir 1 et α.

9.- Puisque $P(-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{125} - \frac{3}{25} = -\frac{14}{125} < 0 = P(\alpha)$, $P(0) = 2 > 0 = P(\alpha)$ et que P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{-\frac{1}{5} < \alpha < 0.}$$

10.- Quand t tend vers 0,

$$f(t) = \frac{e^t}{1+t^2} = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3))(1 - t^2 + o(t^3)) = 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3).$$

$$\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3).}$$

En particulier, quand t tend vers 0

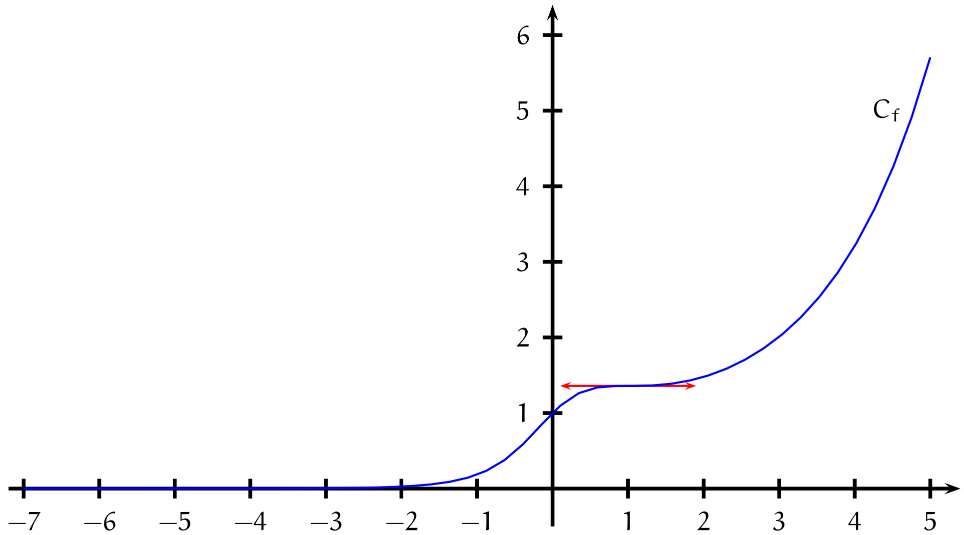
$$f(t) = 1 + t + o(t).$$

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est donc $y = x + 1$. De plus, quand t tend vers 0

$$f(t) - (1+t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \sim -\frac{t^2}{2}.$$

Au voisinage de 0, la différence $f(t) - (1+t)$ est du signe de $-\frac{t^2}{2}$ et est donc négative. On en déduit que C_f est localement sous sa tangente au point d'abscisse 0.

11.- Graphe de f.



En 1, f'' s'annule en changeant de signe. Donc le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_f.

Partie II

12.-

n	P_n
0	1
1	$X^2 - 2X + 1$
2	$X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$

13.- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise.

$f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}\right)' = e^t\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}} + P_n'(t)\frac{e^t}{(1+t^2)^{n+1}} + e^tP_n(t)\frac{-(n+1)(2t)}{(1+t^2)^{n+2}} \\
&= \frac{\big((P_n(t)+P_n'(t))(t^2+1) - 2(n+1)tP_n(t)\big)\,e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \\
&= \frac{P_{n+1}(t)e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \quad \text{avec } P_{n+1} = P_n(X^2 - 2(n+1)X + 1) + P_n'(X^2+1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n(X^2 - 2(n+1)X + 1) + P_n'(X^2+1).}$$

14.- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- Puisque $P_0 = 1$, P_0 a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il en est de même de $P_n(X^2-2(n+1)X+1)+P_n'(X^2+1)$ et donc de P_{n+1}.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathbb{Z}[X].}$$

15.- Il est clair que P_n n'est pas le polynôme nul. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_{n+1}) = \deg(X^2 P_n) = \deg(P_n) + 2.$$

La suite $(\deg(P_n))$ est donc arithmétique de premier terme $\deg(P_0) = 0$ et de raison 2. On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = 2n.}$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{dom}(P_{n+1}) = \mathrm{dom}(X^2 P_n) = \mathrm{dom}(P_n).$$

Puisque $\mathrm{dom}(P_0) = 1$, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{dom}(P_n) = 1.}$$

16.- On évalue en i la relation de la question 13.- On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(i) = (n+1)(-2i)P_n(i).$$

En tenant compte de $P_0(i) = 1$, on obtient par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(i) = (-2i)^n.n!.}$$

Partie III

17.- Puisque f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus $F' = f$. Puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

18.- et 19.- Soit x un réel négatif. Pour tout réel t de $[x, 0]$, on a

$$0 \leq \frac{e^t}{1+t^2} \leq e^t.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leq \int_x^0 \frac{e^t}{1+t^2}\,dt = -F(x) \leq \int_x^0 e^t = 1 - e^x \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-\infty, 0],\ -1 \leq F(x) \leq 0 \quad (**).$$

La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et minorée par -1 sur $\mathbb{R}^-$. On en déduit que F admet une limite réelle ℓ en $-\infty$. De plus, l'encadrement $(**)$ fournit par passage à la limite quand x tend vers $-\infty$:

$$\boxed{-1 \leq \ell \leq 0.}$$

20.- $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0 est donc $y = x$.

21.- On a vu à la question 10.- que $f(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + t - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{5t^3}{6} + o(t^3)$. Par intégration et en tenant compte de $F(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4).}$$

22.- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe C^1 sur $[0,x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x,0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{e^t}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^t(-2t)}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x) - 1 + 2\int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x) - 1 + 2\int_0^1 \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt + 2J(x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = f(x) - 1 + 2\int_0^1 \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt + 2J(x).}$$

23.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Pour tout réel t de $[1,x]$, on a

$$0 \leq \frac{te^t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{te^t}{(0+t^2)^2} = \frac{e^t}{t^3}.$$

Par croissance de l'intégrale (et puisque $x \geq 1$), on obtient

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leq J(x) \leq K(x).}$$

24.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sont de classe C^1 sur $[1,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$K(x) = \left[e^t \frac{1}{t^3}\right]_1^x - \int_1^x e^t \frac{-3}{t^4}\,dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3L(x),$$

et donc

$$\forall x \geq 1,\ K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^3} - e.$$

Mais alors, quand x tend vers $+\infty$,

$$K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^2}\left(\frac{1}{x} - e\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{e^x}{x^2}.o(1) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

$$\boxed{K(x) - 3L(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).}$$

25.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned}
0 \leq L(x) &= \int_1^{x^{3/4}} \frac{e^t}{t^4}\,dt + \int_{x^{3/4}}^x \frac{e^t}{t^4}\,dt \\
&\leq \int_1^{x^{3/4}} \frac{e^{x^{3/4}}}{1^4}\,dt + \int_{x^{3/4}}^x \frac{e^t}{(x^{3/4})^4}\,dt \quad = (x^{3/4}-1)e^{x^{3/4}} + \frac{1}{x^3}\int_{x^{3/4}}^x e^t\,dt = (x^{3/4}-1)e^{x^{3/4}} + \frac{1}{x^3}(e^x - e^{x^{3/4}}) \\
&\leq x^{3/4}e^{x^{3/4}} + \frac{e^x}{x^3}.
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout réel $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{L(x)}{e^x/x^2} \leq x^{11/4}e^{-x+x^{3/4}} + \frac{1}{x}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, le membre de droite de cet encadrement tend vers 0 d'après les théorèmes de croissance comparées. Il en est de même de $\dfrac{L(x)}{e^x/x^2}$ d'après le théorème des gendarmes.

On a montré que

$$\boxed{L(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).}$$

26.- D'après les questions 24.- et 25.-, quand x tend vers $+\infty$, on a

$$K(x) = 3L(x) + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

Mais alors, d'après la question 23.-, quand x tend vers $+\infty$, on a aussi

$$J(x) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

D'après la question 22.-, $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$. Or, quand x tend vers $+\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{x^2}$ ou ce qui revient au même, $F(x) = \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$. D'autre part, comme $\frac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$, on a $A = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$.

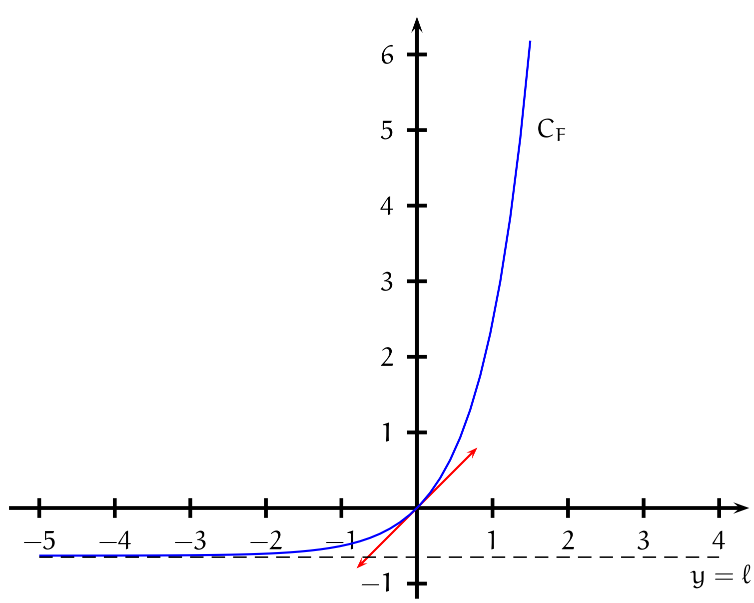
En résumé, quand x tend vers $+\infty$, $F(x) = \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.}$$

27.-

- F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question 17.-
- D'après les questions 18.- et 19.-, C_F admet en $-\infty$ une droite asymptote d'équation $y = \ell$ où ℓ est un certain réel de $[-1, 0]$.
- La tangente à C_F en $(0, 0)$ est la droite d'équation $y = x$ d'après la question 20.-
- La question 26.- montre que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que de plus C_F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).
- $F'' = f'$ est positive sur $\mathbb{R}$ et donc F est convexe sur $\mathbb{R}$.

Allure de la courbe représentative de F.



Problème 2

Partie I

1.- Le noyau de D est constitué des fonctions f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que $f' = 0$. Ker(D) est donc l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est un élément de E tel que $F' = f$.

Ceci montre que tout élément de E est dans Im(D).

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(D) = E.}$$

2.- Soient a, b et c trois réels tels que pour tout réel t, $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$. On écrit cette égalité dans le cas particulier où $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} a + c = 0 \\ e^{\pi/\sqrt{3}}a + e^{-\pi/(2\sqrt{3})}b = 0 \\ e^{2\pi/\sqrt{3}}a - e^{-\pi/\sqrt{3}}c = 0 \end{array}\right. .$$

Mais alors $\left\{\begin{array}{l} c = -a \\ b = -e^{(\sqrt{3}\pi)/2}a \\ (e^{2\pi/\sqrt{3}} + e^{-\pi/\sqrt{3}})a = 0 \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$.

3.- Quand t tend vers 0,

$$\begin{aligned}(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) &= a(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)) + b(1 - \frac{t}{2} + o(t))(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2))(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)) \\ &= a(1 + t + \frac{t^2}{2}) + b(1 - \frac{t}{2})(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8})(1 - \frac{3t^2}{8}) + o(t^2) \\ &= (a + c) + (a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c)t + (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{1}{4}c)t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

Puisque la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est la fonction nulle, quand t tend vers 0, on a aussi

$$(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) = 0 + 0.t + 0.t^2 + o(t^2).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} a + c = 0 \\ a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b - \dfrac{1}{2}c = 0 \\ \dfrac{1}{2}a - \dfrac{\sqrt{3}}{4}b - \dfrac{1}{4}c = 0 \end{array}\right. .$$

La première égalité fournit $c = -a$. La deuxième s'écrit alors $\dfrac{3}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = 0$ ou encore $b = -\sqrt{3}a$. En reportant dans la dernière équation, on obtient $(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4})a = 0$ et donc $a = 0$. Puis $b = -\sqrt{3}a = 0$ et $c = -a = 0$.

4.- Pour tout réel t, on divise les deux membres de l'égalité $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ par le réel non nul e^t. On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a + b.e^{-3t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-3t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad (*).$$

Pour tout réel t,

$$\left|b.e^{-3t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-3t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq (|b| + |c|)e^{-3t/2}.$$

Par suite, l'expression $b.e^{-3t/2}\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.e^{-3t/2}\cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

En passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient alors $a=0$. Après simplification par le réel non nul $e^{-3t}2$, il reste

$$\forall t\in\mathbb{R},\ b.\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

En évaluant en $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $b=c=0$.

En résumé,

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a.f_1+b.f_2+c.f_3=0\Rightarrow a=b=c=0).$$

$$\boxed{\text{La famille } (f_1,f_2,f_3) \text{ est une famille libre de } E \text{ ou aussi une base de } G.}$$

5.- On a $D(f_1)=f_1$, $D(f_2)=-\dfrac{1}{2}f_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_2-\dfrac{1}{2}f_3$. Mais alors, pour tout réels a, b et c, on a

$$D(af_1+bf_2+cf_3)=af_1+\left(-\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)f_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}c\right)f_3.$$

Ainsi, l'image par D d'un élément de G est encore un élément de G et donc

$$\boxed{G \text{ est stable par } D.}$$

6.- Les égalités de la question précédente fournissent immédiatement

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

7.- $M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Puis

$$M^3=M.M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$

8.- La question 7.- montre que M est inversible et que

$$\boxed{M^{-1}=M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}={}^tM.}$$

9.- La matrice de l'endomorphisme $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible et donc

$$\boxed{\widehat{D} \text{ est un automorphisme de } G.}$$

10.- Puisque $M^{-1} = M^2$,

$$\boxed{(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D}^2.}$$

Partie II

11.-

i	f_i	f'_i	f''_i
1	$f_1(0) = 1$	$f'_1(0) = 1$	$f''_1(0) = 1$
2	$f_2(0) = 0$	$f'_2(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$f''_2(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3	$f_3(0) = 1$	$f'_3(0) = -\dfrac{1}{2}$	$f''_3(0) = -\dfrac{1}{2}$

Pour calculer les $f'_i(0)$ et $f''_i(0)$, on a utilisé les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} f'_2 = -\dfrac{1}{2}f_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\ f'_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \dfrac{1}{2}f_3. \end{array}\right.$$

qui fournissent aussi

$$\left\{\begin{array}{l} f''_2 = -\dfrac{1}{2}f'_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}f'_3 \\ f''_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}f'_2 - \dfrac{1}{2}f'_3 \end{array}\right. .$$

12.- Montrons que φ est un produit scalaire sur G.
• Soit $(g, h) \in G^2$. $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0) = h(0)g(0) + h'(0)g'(0) + h''(0)g''(0) = \varphi(h, g)$
Donc φ est une forme symétrique.
• Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(g_1, g_2, h) \in G^3$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, h) &= (\lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0))h(0) + (\lambda_1 g'_1(0) + \lambda_2 g'_2(0))h'(0) + (\lambda_1 g''_1(0) + \lambda_2 g''_2(0))h''(0) \\ &= \lambda_1(g_1(0)h(0) + g'_1(0)h'(0) + g''_1(0)h''(0)) + \lambda_2(g_2(0)h(0) + g'_2(0)h'(0) + g''_2(0)h''(0)) \\ &= \lambda_1\varphi(g_1) + \lambda_2\varphi(g_2).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire par symétrie.
• Soit $g \in G$. Posons $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ où a, b et c sont trois réels.
D'après la question 5.-, on a

$$g' = af_1 + \left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)f_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)f_3 \quad (***).$$

D'après le tableau de la question 11.-, on a $g(0) = a + c$ puis $g'(0) = a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b - \dfrac{1}{2}c$ et , en dérivant la relation $(***)$,

$$g''(0) = a + \left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)\frac{1}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c.$$

Donc

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(af_1 + bf_2 + cf_3, af_1 + bf_2 + cf_3) = (a + c)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2.$$

Pour tout g de G, on a déjà $\varphi(g,g) \geq 0$ ce qui montre que la forme φ est positive. De plus,

$$\varphi(g,g) = 0 \Leftrightarrow (a+c)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+c=0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -a \\ \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ \frac{3}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -a \\ \sqrt{3}a + b = 0 \\ \sqrt{3}a - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -a \\ b = \sqrt{3}a \\ 2\sqrt{3}a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

φ est donc une forme définie positive sur G.

En résumé, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire sur G.

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } G.}$$

13.- Toujours à partir du tableau de la question 11.-, on a

$$\varphi(f_1,f_2) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,\ \varphi(f_1,f_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ et } \varphi(f_2,f_3) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B} \text{ est orthogonale.}}$$

14.- $\varphi(f_1,f_1) = 1 + 1 = 2 \neq 1$. Donc

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B} \text{ n'est pas orthonormée.}}$$

Partie III

15.- Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, f est déjà trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit alors n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons que f soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore f est $n+3$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{toute solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de E).

16.- Soit P un polynôme tel que $P''' = P$. Si P n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(P''') < \deg(P)$ et en particulier $P'' \neq P$. Réciproquement, le polynôme nul est bien solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction nulle est la seule solution polynomiale de } (\mathcal{E}).}$$

17.- A la question 7.-, on a établi que $M^3 = I_3$. On en déduit que $\widehat{D}^3 = Id_G$ ou encore la restriction de $D^3 - Id_E$ à G est nulle. Ceci montre que

$$\boxed{G \subset \mathrm{Ker}(T),}$$

ou encore toute combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

18.- Soient f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et $g = f'' + f' + f$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g.$$

Donc g est solution de l'équation $y' = y$ sur $\mathbb{R}$.

19.- Les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où λ est une constante réelle.

20.- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $z^2 + z + 1 = 0$. Cette dernière équation admet pour solutions les nombres $z_1 = j = e^{-1/2}e^{i\sqrt{3}/2}$ et $z_2 = \bar{j} = e^{-1/2}e^{-i\sqrt{3}/2}$.

On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ est donc (f_2, f_3).

21.- Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est bien sur la fonction $t \mapsto \dfrac{\lambda}{3}e^t$. On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{3}e^t + e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right),\ (\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3.$$

22.- les questions 18.- à 21.- montrent que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est une combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 et donc un élément de G. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) \subset G$, et finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = G,}$$

ou encore les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3.

