CONCOURS COMMUN 2002

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

PROBLEME 1 : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Partie A

1. • Montrons que la relation $\sim$ est réflexive.
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque $I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$ et que $A = I_3^{-1}AI_3$, on a $A \sim A$. On a montré que

$$(\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ A \sim A) \text{ et donc la relation } \sim \text{ est réflexive.}$$

• Montrons que la relation $\sim$ est symétrique.
Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$. Si $A \sim B$, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que $B = (P^{-1})^{-1}A(P^{-1})$.
Comme $P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a donc $B \sim A$. On a montré que

$$(\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A \sim B \Rightarrow B \sim A)) \text{ et donc la relation } \sim \text{ est symétrique.}$$

• Montrons que la relation $\sim$ est transitive.
Soit $(A, B, C) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3$. Si $A \sim B$ et $B \sim C$, il existe $(P, Q) \in (GL_3(\mathbb{R})^2$ tel que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. On en déduit que $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. Comme $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$, on donc $A \sim C$. On a montré que

$$(\forall (A, B, C) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3,\ (A \sim B \text{ et } B \sim C \Rightarrow A \sim C)) \text{ et donc la relation } \sim \text{ est transitive.}$$

Finalement, la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

$$\boxed{\text{La relation } \sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$. Si A et B sont semblables, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$

car $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$. Par contraposition, on a montré que

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (\det A \neq \det B \Rightarrow A \not\sim B).}$$

3. a. Soit $y \in \mathrm{Im}(w)$. Il existe $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. Mais alors, $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker} u^i$. On a montré que $\forall y \in E,\ (y \in \mathrm{Im}(w) \Rightarrow y \in \mathrm{Ker} u^i)$, et donc que

$$\boxed{\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i).}$$

b. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) = \dim(\mathrm{Ker}(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w)).$$

Mais d'après a), $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$ et d'autre part, $\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(u^i) \cap \mathrm{Ker}(u^{i+j}) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$. Donc, en passant aux dimensions

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^j)).}$$

4. a. L'égalité $u^3 = 0$ fournit $\dim(\mathrm{Ker}(u^3)) = 3$ et l'égalité $\mathrm{rang} u = (2)$ fournit, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - 2 = 1$. D'après 3.b),

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1 + 1 = 2.$$

D'autre part,

$$3 = \mathrm{Ker}(u^3) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) + 1$$

et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \geq 2$. Finalement,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2.}$$

b. D'après a), $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$. En particulier, $\mathrm{Ker}(u^2) \neq E$ et donc $u^2 \neq 0$. Il existe donc un vecteur a tel que $u^2(a) \neq 0$.

Montrons que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\alpha a + \beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0$. En prenant l'image des deux membres de cette égalité par u^2, on obtient $\alpha u^2(a) + \beta u^3(a) + \gamma u^4(a) = u^2(0)$. Mais, puisque u^2 est un endomorphisme de E, on a $u^2(0) = 0$. D'autre part, $u^3 = 0$ et en particulier, $u^3(a) = 0$. Enfin, $u^4(a) = u(u^3(a)) = u(0) = 0$. Il reste donc $\alpha u^2(a) = 0$, et, puisque le vecteur $u^2(a)$ n'est pas nul, $\alpha = 0$. Par suite, $\beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0$, et en prenant l'image des deux membres par u, on obtient, pour les mêmes raisons que précédemment, $\beta = 0$. Enfin, il reste $\gamma u^2(a) = 0$ et donc $\gamma = 0$. Finalement,

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ ((\alpha a + \beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0)).$$

Par suite, la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre. De plus, $\mathrm{card}(u^2(a), u(a), a) = 3 = \dim(E) < +\infty$, et donc

$$\boxed{\text{La famille } (u^2(a), u(a), a) \text{ est une base de } E.}$$

c. On a immédiatement

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Mais alors, $U^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{2,3} + E_{2,3}E_{1,2} + E_{2,3}E_{2,3} = E_{1,3}$ et donc,

$$\boxed{V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. a. Puisque $\mathrm{rang}\, u = 1$, u n'est pas nul et il existe un vecteur b tel que $u(b) \neq 0$.

b. Puisque $\mathrm{rang}\, u = 1$, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(u)$ est un plan vectoriel. Puisque $u^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ ($u^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in E,\ u(u(x)) = 0 \Rightarrow \forall x \in E,\ u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$).

Ainsi, $\mathrm{Im}(u)$ est une droite vectorielle contenue dans $\mathrm{Ker}(u)$. Le vecteur $u(b)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$ et donc la famille $(u(b))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ ou encore une famille libre du plan $\mathrm{Ker}(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur c de $\mathrm{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et en particulier une famille libre de E.

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } c \text{ de } \mathrm{Ker}(u) \text{ tel que la famille } (u(b), c) \text{ est une famille libre de } E.}$$

Montrons alors que la famille $(u(b), b, c)$ est une base de E. Il suffit pour cela de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha u(b) + \beta b + \gamma c = 0 \Rightarrow u(\alpha u(b) + \beta b + \gamma c) = 0 \Rightarrow \beta u(b) = 0,$$

(car $u^2 = 0$ et $c \in \mathrm{Ker}(u)$), et donc $\beta = 0$ puisque $u(b) \neq 0$.

Il reste $\alpha u(b) + \gamma c = 0$ et donc $\alpha = \gamma = 0$ car la famille $(u(b), c)$ est libre. Finalement, la famille $(u(b), b, c)$ est libre et donc

$$\boxed{\text{la famille } (u(b), b, c) \text{ est une base de } E.}$$

c. Immédiatement,

$$\boxed{U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

puis, comme $u^2 - u = -u$,

$$\boxed{V' = -U' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Partie B

6. A et T sont semblables. Par suite, d'après **A.2**, $\det A = \det T = 1.1.1 = 1 \neq 0$. La matrice A est donc bien inversible.

7. On a $N = \alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3}$. Par suite, $N^2 = (\alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3})^2 = \alpha\gamma E_{1,3}$ et $N^3 = N.N^2 = (\alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3})\alpha\gamma E_{1,3} = 0$. En résumé,

$$\boxed{N^2 = \alpha\gamma E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0.}$$

Par passage à l'inverse, on obtient alors $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = (I_3 + N)^{-1}$. Maintenant, d'après **B7.**, $N^3 = 0$ et donc, $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3 = (I_3 - N + N^2)(I_3 + N)$. On en déduit que l'inverse de $I_3 + N$ est $I_3 - N + N^2$. Donc,

$$\boxed{P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta + \alpha\gamma \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

8. Si $N = 0$, alors $A = I_3$ et donc $A = A^{-1}$. Dans ce cas particulier, les matrices A et A^{-1} sont semblables car égales.

9. **a.** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice N dans la base canonique. Par hypothèse, $u^3 = 0$ et $\text{rang}(u) = 2$. D'après **A.4.c)**, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou encore

$$\boxed{N \text{ est semblable à la matrice } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On en déduit que M est semblable à la matrice $U^2 - U$ car si $N = P^{-1}UP$,

$$M = N^2 - N = (P^{-1}UP)^2 - P^{-1}UP = P^{-1}U^2P - P^{-1}UP = P^{-1}(U^2 - U)P.$$

$$\boxed{M \text{ est semblable à la matrice } V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b. Puisque N et N^2 commutent ($N.N^2 = N^2.N = N^3$), la formule du binôme de NEWTON fournit

$$M^3 = (N^2 - N)^3 = N^6 - 3N^5 + 3N^4 - N^3 = 0.$$

La matrice M est semblable à la matrice V et a donc même rang (puisque P et P^{-1} sont inversibles, le rang de $P^{-1}MP$ est le rang de M). Les deux dernières colonnes de V ne sont clairement pas colinéaires, ce qui montre que V est de rang au moins 2, et la première colonne de V est nulle ce qui montre que V est de rang au plus 2. Finalement, V est de rang 2 et donc,

$$\boxed{\text{rang } M = 2.}$$

c. M est donc également une matrice telle que $M^3 = 0$ et rang $M = 2$. Par suite, d'après **B.9.a)**, M et N sont semblables toutes deux à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par transitivité de $\sim$ (question **A.1.**), on a montré que

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables.}}$$

d. On a déjà $P^{-1}AP = I + N$ et $P^{-1}A^{-1}P = I + M$. Mais d'après la question précédente, il existe une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$. Par suite

$$A^{-1} = P(I+M)P^{-1} = P(I+Q^{-1}NQ)P^{-1} = PQ^{-1}(I+N)QP^{-1} = PQ^{-1}P^{-1}APQP^{-1} = (PQP^{-1})^{-1}A(PQP^{-1}).$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

10. L'égalité rang $N = 1$ impose au mineur en haut à droite d'être nul ou encore $\alpha\gamma = 0$. D'après **B.6.**, on a alors $N^2 = 0$. Par suite, par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, la question **A.5.** montre que N est semblable à $U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et M est semblable à $V' = -U'$. Ainsi, M et N sont toutes deux de carré nul et de rang 1 et donc semblables, toujours d'après **A.5.**. Comme à la question précédente, on en déduit que A et A^{-1} sont semblables.

11. Exemple : **a.** Soit $x \in E$. Posons $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ où α, β et γ sont trois réels.

$$x \in \text{Ker}(u - id_E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta + \gamma = 0$$

Donc,

$$\text{Ker}(u - id_E) = \{\alpha a + \beta b - \beta c,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{\alpha a + \beta(b - c),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ où } e_1 = a \text{ et } e_2 = b - c.$$

Les vecteurs e_1 et e_2 n'étant pas colinéaires, (e_1, e_2) est une base de Ker$(u - \text{Id})$ qui est en particulier de dimension 2. (Une autre manière d'obtenir cette dimension était la suivante : $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id})) = 3 - \text{rang}(u - \text{Id}) = 3 - \text{rang}(A - I) = 3 - 1 = 2$.)

b. La matrice de la famille (e_1, e_2, c) dans la base (a, b, c) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut 1 et n'est donc pas nul. Par suite,

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, e_2, c) \text{ est une base de } E.}$$

On a déjà $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$. D'autre part, $u(c) = -b + 2c = -(b - c) + c = -e_2 + c$ (si on ne découvre pas cette relation, les formules de changement de base fournissent la matrice de u imparablement). La matrice de u dans la base (e_1, e_2, c) s'écrit donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. La matrice A est, d'après **b)**, semblable à la matrice $\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I} + \mathsf{N}$ où $\mathsf{N} = -\mathsf{E}_{2,3}$ est de carré nul et de rang 1. D'après **B.10.**, les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12. La matrice $-\mathrm{I}_3$ est inversible, égale à son inverse ($(-\mathrm{I}_3).(-\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$) et en particulier semblable à son inverse. Maintenant, $\det(-\mathrm{I}_3) = (-1)^3 = -1 \neq \det \mathsf{T}$. $-\mathrm{I}_3$ n'est donc pas semblable (d'après **A.2.**) à une matrice du type T.

Problème 2 : Calcul et irrationnalité de $\zeta(2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}...+\frac{1}{n^2}\right)$

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right)_{n\geq 1}$

1. Soit k un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est définie et continue sur $[k, k+1]$, décroissante sur $[k, k+1]$. Pour $x \in [k, k+1]$, on a alors $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}$ et par croissance de l'intégrale on a

$$\frac{1}{(k+1)^p} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^p}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^p} dx = \frac{1}{k^p}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \leq \frac{1}{k^p}.}$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient d'après la relation de Chasles pour les intégrales

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx = \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} = S_{n-1}(p).$$

De plus

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} = S_n(p) - 1.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx \leq S_{n-1}(p).}$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par suite, cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si la fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{1}{x^p}\, dx$ admet une limite réelle quand X tend vers $+\infty$.

• Soient X un réel supérieur ou égal à 1 et p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\, dx = \left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_1^X = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{X^{p-1}}\right).$$

Puisque $p - 1 > 0$, $\frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{X^{p-1}}\right)$ tend vers le réel $\frac{1}{p-1}$ quand X tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Soit X un réel supérieur ou égal à 1 (et $p = 1$).

$$\int_1^X \frac{1}{x}\, dx = \ln(X).$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \text{la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^p} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ si et seulement si } p \geq 2.}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Si $p = 1$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$S_n(1) \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1).$$

Or $\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = +\infty.$$

- Si $p \geq 2$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

$$S_n(p) \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = 1 + \frac{1}{p-1},$$

ce qui reste clair pour $n = 1$. La suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ est donc majorée par le nombre $1 + \dfrac{1}{p-1}$. D'autre part, cette suite est clairement croissante (pour $n \geq 1$, $S_{n+1}(p) - S_n(p) = \dfrac{1}{(n+1)^p} \geq 0$) et donc la suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ converge.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ la suite } (S_n(p))_{n\geq 1} \text{ converge si et seulement si } p \geq 2.}$$

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

5. φ est continue sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$ (puisque, pour $t \in]0,\pi]$, $\dfrac{t}{2} \in]0,\dfrac{\pi}{2}]$). De plus, en 0,

$$\frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sim \frac{-t}{2\frac{t}{2}} = -1.$$

Donc, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(t) = -1 = \varphi(0)$. Ainsi, φ est continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$.

Ensuite, φ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$ et pour $t \in]0,\pi]$,

$$\varphi'(t) = \frac{(\frac{t}{\pi} - 1)\sin\frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi} - t)\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Or, $2\sin^2\dfrac{t}{2} \underset{t\to 0}{\sim} 2\dfrac{t^2}{4} = \dfrac{t^2}{2}$, et d'autre part,

$$\begin{aligned}(\frac{t}{\pi} - 1)\sin\frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi} - t)\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} &\underset{t\to 0}{=} (-1 + \frac{t}{\pi})(\frac{t}{2} + o(t^2)) - \frac{1}{2}(1 + o(t))(-t + \frac{t^2}{2\pi})\\ &= t(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + t^2(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}) + o(t^2)\\ &\sim \frac{t^2}{4\pi}\end{aligned}$$

et finalement, quand t tend vers 0,

$$\varphi'(t) \sim \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}.$$

En résumé,

- φ est continue sur $[0,\pi]$.
- φ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$.
- φ' a une limite réelle quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.

D'après un théorème classique d'analyse, φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ (et en particulier est dérivable en 0 avec $\varphi'(0)=\dfrac{1}{2\pi}$).

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

6. Soit k un entier naturel non nul. Une double intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,dt &= \left[\frac{\sin(kt)}{k}h(t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kt)h'(t)\,dt\\
&= \frac{1}{k}\int_0^{\pi}(-\sin(kt))(\frac{t}{\pi}-1)\,dt = \frac{1}{k}\left(\left[\frac{\cos(kt)}{k}(\frac{t}{\pi}-1)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kt)\frac{1}{\pi}\,dt\right))\\
&= \frac{1}{k^2}\left[\cos(kt)(\frac{t}{\pi}-1)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}.}$$

7. Soient $t\in]0,\pi]$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})t)-\sin((k-\frac{1}{2})t) = \sum_{k=1}^{n}(\sin(((k+1)-\frac{1}{2})t)-\sin((k-\frac{1}{2})t)\\
&= \sin((n+1-\frac{1}{2})t)-\sin((1-\frac{1}{2})t) \text{ (somme télescopique)}\\
&= \sin((n+\frac{1}{2})t)-\sin\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{t}{2}$ est dans $]0,\dfrac{\pi}{2}]$ et donc, $\sin\dfrac{t}{2}\neq 0$. Après division des deux membres par $2\sin\dfrac{t}{2}$, on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in]0,\pi],\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.}$$

8. Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque ψ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt\right| &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|-\left[\psi(t)\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\psi'(t)\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt\right|\\
&\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(|\psi(0)|+|\psi(\pi)|+\int_0^{\pi}|\psi'(t)|\,dt\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt = 0.}$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après 6.,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}h(t)\cos(kt)\,dt = \int_0^{\pi}h(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\,dt.$$

D'après 7., si $t \in]0, \pi]$,

$$h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left((n+\frac{1}{2})t)\right) - \frac{1}{2}h(t) = \varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $t = 0$ par continuité des deux membres en 0. Donc,

$$\forall t \in [0, \pi],\ h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right).$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t)\right)\ dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{t^2}{2\pi} - t)\ dt.$$

D'après 8.,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{t^2}{2\pi} - t)\ dt = -\frac{1}{2}(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2}) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a montré que

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. La formule du binôme de NEWTON fournit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} e_i x^i,$$

où

$$\forall i \in \{n, ..., 2n\},\ e_i = (-1)^{i-n}C_n^{i-n} \in \mathbb{Z}.$$

b. D'après la formule de TAYLOR, pour $k \in \mathbb{N}$, le coefficient de x^k dans f_n est égal à $\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$. f_n étant un polynôme de degré $2n$ et de valuation n on en déduit que, pour $k < n$ ou $k > 2n$, $f^{(k)}(0)$ est égal à 0 et en particulier est un entier relatif.

Si $n \leq k \leq 2n$,

$$f^{(k)}(0) = k!\frac{1}{n!}(-1)^{k-n}C_n^{k-n} = (-1)^{k-n}k(k-1)\dots n.C_n^{k-n} \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant, puisque pour tout réel x, on a $f_n(x) = f_n(1-x)$, pour tout réel x et tout entier naturel k, on a

$$f_n^k(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

et en particulier, pour $x = 1$, $\forall k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}.}$$

11. a. $f^{(2k)}(0)$ est nul si $2k < n$ ou $2k > 2n$. Donc

$$F_n(0) = b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a^{2n-2k}}{b^{2n-2k}}f_n^{(2k)}(0) = \sum_{\frac{n}{2}\leq k\leq n}(-1)^k a^{2n-2k}b^{2k-n}f_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z},$$

et de même, $F_n(1) \in \mathbb{Z}$.

b. Pour tout réel x,
$$g_n'(x) = (F_n''(x) + \pi^2 F_n(x))\sin(\pi x).$$
Mais,
$$\begin{aligned}
F_n''(x) &= b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) = b^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) \quad (\text{car } \deg(f_n) = 2n)\\
&= b^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = -\pi^2 b^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x)\\
&= -\pi^2 (F_n(x) - \pi^{2n} b^n f_n(x)).
\end{aligned}$$
Par suite,
$$g_n'(x) = (F_n''(x) + \pi^2 F_n(x))\sin(\pi x) = \pi^2 \pi^{2n} b^n f_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x).$$
On en déduit que
$$A_n = \pi \int_0^1 \frac{1}{\pi^2} g_n'(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

12. a. On a déjà $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Redémontrons alors le théorème de croissances comparées de l'énoncé.

Il existe un rang N tel que pour $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Mais alors, pour $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq u_N \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}$, et puisque cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que
$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.}$$

b. Puisque la suite $(\dfrac{a^n}{n!})$ tend vers 0, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}$.

c. Pour $x \in [0,1]$, on a
$$0 \leq x(1-x) = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \leq 1.$$
Donc,
$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}.}$$

d. Pour $x \in [0,1]$, on a aussi $\sin(\pi x) \geq 0$ (de sorte que $0 \leq f_n(x)\sin(\pi x) \leq \dfrac{1}{n!}\sin(\pi x)$), et par croissance de l'intégrale, on a alors pour $n \geq n_0$,
$$0 \leq A_n \leq \pi \frac{a^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx = \frac{a^n}{n!} \pi \frac{2}{\pi} < \frac{1}{2}.2 = 1.$$
Maintenant, la fonction $x \mapsto \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x)$ est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$. On en déduit que son intégrale sur $[0,1]$ est un nombre strictement positif. On a montré que
$$\boxed{\forall n \geq n_0,\ 0 < A_n < 1.}$$

En particulier, A_{n_0} est un entier relatif strictement compris entre 0 et 1 ce qui est absurde. Il était donc absurde de supposer que π^2 était rationnel et on a montré que
$$\boxed{\pi^2 \text{ est irrationnel.}}$$

e. Si π était rationnel, son carré devrait être rationnel ce qui n'est pas. Donc,
$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$$

