CONCOURS COMMUN 2002

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Problème d'analyse

1. **1.1** f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, il est connu que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t} = 1$ et donc,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t) = 1 = f(0).$$

Ainsi, f est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, $f(-t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(-t)}{-t} = \dfrac{-\operatorname{Arctan} t}{-t} = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t} = f(t)$, ce qui montre que f est paire.

$$\boxed{\text{f est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}}$$

1.2 Quand t tend vers 0 ;

$$f(t) = \frac{t + o(t^2)}{t} = 1 + 0.t + o(t).$$

f est continue en 0 et admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{f est dérivable en 0 avec } f'(0) = 0.}$$

1.3 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{\dfrac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t}{t^2} = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t^2}.$$

1.4 Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Les deux fonctions $w \mapsto w$ et $w \mapsto \dfrac{-1}{2(1+w^2)}$ sont de classe C^1 sur $[0,t]$ si $t > 0$ et $[t,0]$ si $t < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw = \int_0^t w\frac{w}{(1+w^2)^2}\,dw = \left[w\frac{-1}{2(1+w^2)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{2(1+w^2)}\,dw) = \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{Arctan} t\right) = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).}$$

Donc, si $t \neq 0$, $f'(t) = \dfrac{-2}{t^2}\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw$.

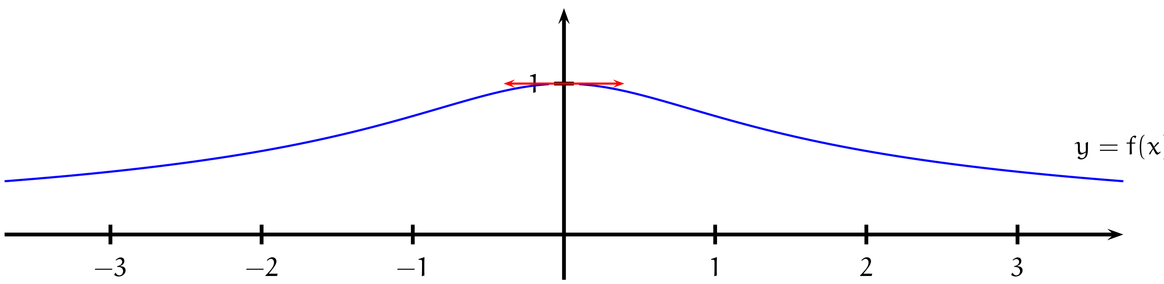
• Si $t > 0$, la fonction $w \mapsto \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw$ est continue sur $[0,t]$, positive et non nulle sur $[0,t]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw > 0$ et donc que $f'(t) < 0$.

• Si $t < 0$, la fonction $w \mapsto \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}$ dw est continue sur $[t, 0]$, positive et non nulle sur $[t, 0]$. On en déduit que $\displaystyle\int_t^0 \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw > 0$ ou encore que $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw < 0$ et donc que $f'(t) > 0$.

Ainsi, f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, strictement négative sur $]0, +\infty[$ (et s'annule en 0). Donc

$$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur }]-\infty, 0] \text{ et strictement décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

1.5 Quand t tend vers $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{\pi}{2t}$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.



2.

2.1 f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier, continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. F est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 (F est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$). Pour $x \neq 0$, on a

$$\phi(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Quand x tend vers 0, cette dernière expression tend vers

$$F'(0) = f(0) = 1 = \Phi(0).$$

Ainsi, ϕ est donc continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = -t$, on obtient (f étant paire)

$$\phi(-x) = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\int_0^{x} f(-u). - du = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du = \phi(x).$$

ϕ est donc paire.

$$\boxed{\phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}}$$

2.2 • Le résultat est clair pour $x = 0$ ($f(0) = \phi(0) = 1$).

• Soit $x > 0$. D'après la question 1.4, f est décroissante sur $[0, x]$. Par suite, pour tout réel $t \in [0, x]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(0) = 1$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dt \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \phi(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x dt = 1.$$

Ainsi, si $x > 0$, $f(x) \leq \Phi(x) \leq 1$.

• Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $f(-x) \leq \Phi(-x) \leq 1$. Mais f et Φ sont paires, et donc de nouveau, $f(x) \leq \Phi(x) \leq 1$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \Phi(x) \leq 1.}$$

2.3 ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul on a,

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{x}(f(x) - \Phi(x)).$$

D'après la question 1.2., f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 à savoir

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x).$$

F admet donc en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration, à savoir

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + o(x^2) = x + o(x^2).$$

Finalement,

$$\phi(x) = \frac{1}{x}F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x).$$

Ainsi, en tenant compte de $\phi(0) = 1$, ϕ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 . On en déduit que

$$\boxed{\phi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \phi'(0) = 0.}$$

D'après la question 2.2, pour $x > 0$, on a $f(x) \leq \phi(x)$. Par suite, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x)) \leq 0$. ϕ' est négative sur $]0, +\infty[$ et par parité, ϕ' est positive sur $]-\infty, 0[$. Donc

$$\boxed{\phi \text{ est donc décroissante sur } [0, +\infty[\text{ et croissante sur }]-\infty, 0].}$$

2.4 Soit $x > 1$.

$$0 \leq \int_1^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \leq \int_1^x \frac{\pi/2}{t}\,dt = \frac{\pi \ln x}{2}.$$

Par suite, pour $x > 1$,

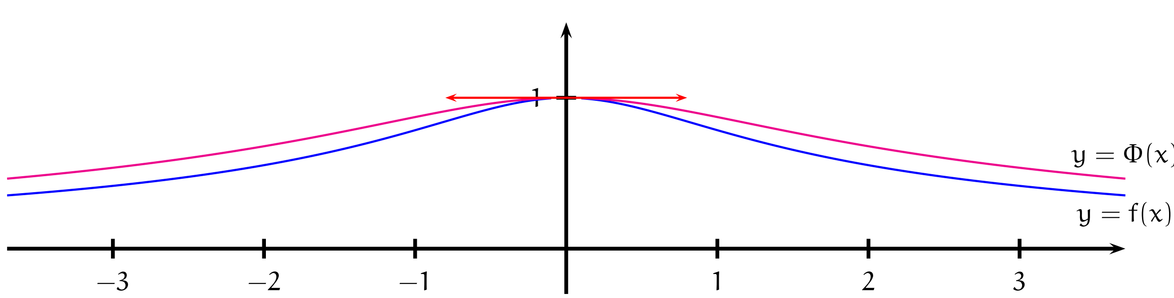
$$0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi \ln x}{2x} = 0$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ et finalement, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0.}$$

2.5



3. **3.1** Soit $t \geq 0$. De l'inégalité $(t-1)^2 \geq 0$, on déduit $2t \leq 1+t^2$ et donc, puisque $1+t^2 > 0$, $\dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}.}$$

3.2 Soit $x > 0$.

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = \frac{1}{x^2}(x-\operatorname{Arctan} x) = \frac{x-xf(x)}{x^2} = \frac{1-f(x)}{x}.$$

Mais alors, d'après les questions 2.2 et 2.3,

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}|f(x)-\phi(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x)-f(x)) \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$$

Avec la question 3.1, on en déduit que

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\forall x > 0,\ |\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

Maintenant, ϕ est paire et donc ϕ' est impaire, et l'inégalité proposée reste vraie pour $x < 0$ par parité. Enfin, pour $x = 0$, d'après la question 2.3, $|\phi'(0)| = 0 \leq \dfrac{1}{4}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}.}$$

3.3 Pour x réel, posons $\psi(x) = x - \phi(x)$. D'après 2.3, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour x réel, d'après la question 3.2, on a

$$\psi'(x) = 1-\phi'(x) \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

ψ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\psi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(x), \lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)[$. Maintenant, d'après la question 2.4, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$ et donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x) = +\infty$.

$$\boxed{\psi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

En particulier, l'élément 0 de $\mathbb{R} = \psi(\mathbb{R})$ a un et un seul antécédent par ψ dans $\mathbb{R}$, ou encore l'équation $\phi(x) = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, notée α.

$\psi(0) = 0-\phi(0) = -1 < 0 = \psi(\alpha)$ et puisque ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$. D'autre part, puisque f est décroissante sur $[0,1]$ d'après la question 1.4, $\psi(1) = 1-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \geq 1-\int_0^1 f(0)\,dt = 1-1 = 0 = \psi(\alpha)$. Par suite, $\alpha \leq 1$. Finalement,

$$\boxed{\alpha \in]0,1].}$$

3.4 ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc, par récurrence, pour tout choix de u_0, u_n existe pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3.2 et l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b, on a

$$|\phi(b)-\phi(a)| \leq \frac{1}{4}|b-a|.$$

Par suite,

$$|u_{n+1}-\alpha| = |\phi(u_n)-\phi(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|.$$

Mais alors, par récurrence, on a immédiatement $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|.}$$

Comme $\dfrac{1}{4^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$

4. On note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

4.1 Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ sont continues sur I. On sait alors que les solutions de (E) sont de la forme $\lambda f_0 + f_1$ où f_0 est une solution particulière non nulle de (E_H) et f_1 est une solution particulière de (E).

Soit g une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ xg'(x) + g(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xg)'(x) = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ xg(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ g(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt = \frac{\lambda}{x} + \phi(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \phi(x),\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

4.2 Soit g une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de g à $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$) est solution de (E) sur cet intervalle et donc de la forme précédente. Par suite, il existe une constante λ_1 (resp. λ_2) telle que $\forall x > 0$, (resp. $\forall x < 0$), $g(x) = \dfrac{\lambda_1}{x} + \phi(x)$ (resp. $\dfrac{\lambda_2}{x} + \phi(x)$).

g devant être solution sur $\mathbb{R}$, g doit en particulier avoir une limite réelle en 0. Or, d'après la question 2.1, ϕ a une limite réelle en 0 et d'autre part, $\dfrac{\lambda}{x}$ a une limite réelle en 0 si et seulement si $\lambda = 0$. Il est donc nécessaire que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc que $\forall x \neq 0,\ g(x) = \Phi(x)$.

g doit encore être continue en 0 ce qui impose $g(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \phi(x) = \phi(0)$ (puisque ϕ est elle même continue en 0). Finalement, (E) admet au plus une solution sur $\mathbb{R}$, à savoir la fonction ϕ.

Réciproquement, d'après la question 2.3, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$x^2\phi'(x) + x\phi(x) = x(f(x) - \phi(x)) + x\phi(x) = xf(x) = \operatorname{Arctan} x,$$

ce qui montre que ϕ est effectivement solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une et une seule solution sur } \mathbb{R}, \text{ à savoir la fonction } \phi.}$$

Problème d'analyse

1. **1.1** La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $\frac{4}{3}\psi$ est $\frac{4}{3}A$ ou encore

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de cette matrice. Ces colonnes vérifient

$$\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{9}\sqrt{1+4+4} = 1 \text{ et } C_1.C_2 = \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0.$$

Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc $\frac{4}{3}A$ est une matrice orthogonale positive. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on en déduit que $\frac{4}{3}\psi$ est un automorphisme orthogonal positif et donc une rotation (distincte de l'identité).

Déterminons l'axe $\mathcal{D}$ de $\frac{4}{3}\psi$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(-x+2y+2z) = x \\ \frac{1}{3}(2x-y+2z) = y \\ \frac{1}{3}(2x+2y-z) = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} z = 2x-y \\ x-2y+(2x-y) = 0 \\ x+y-2(2x-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x \\ z = x \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

$\frac{4}{3}\psi$ est une rotation d'axe la droite vectorielle d'équation $x = y = z$. $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$. $\mathcal{D}$ est dorénavant orientée par u.

Déterminons l'angle θ de la rotation $\frac{4}{3}\psi$. On sait que

$$2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(\frac{4}{3}\psi) = \frac{1}{3}(-1-1-1) = -1,$$

et donc que $\cos\theta = -1$ ou encore $\theta = \pi\ (2\pi)$.

$$\boxed{\frac{4}{3}\psi \text{ est le demi-tour d'axe la droite } \mathcal{D} = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3).}$$

1.2 Si on note r le demi-tour $\frac{4}{3}\psi$, on a $\psi = \frac{3}{4}r$. Donc

$$\boxed{\psi \text{ est la composée commutative de l'homothétie de rapport } \frac{3}{4} \text{ et du demi-tour d'axe } \mathcal{D} = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3).}$$

2. **2.1** Puisque $\frac{4}{3}\psi$ est un automorphisme orthogonal, $\frac{4}{3}\psi$ est en particulier dans $\mathsf{GL}(E)$ et il en est de même de ψ. D'autre part, Pour x dans E,

$$\|\psi(x)\| = \frac{3}{4}\|r(x)\| = \frac{3}{4}\|x\| \leq \frac{3}{4}\|x\|,$$

ce qui montre que ψ est dans $\mathcal{S}$. Finalement,

$$\boxed{\psi \in \mathcal{S} \cap \mathsf{GL}(E).}$$

2.2 Pour tout réel $k \in [0,1[$, $\|\mathrm{Id}(e_1)\| = \|e_1\| = 1 > k = k\|e_1\|$. Donc, $\forall k \in [0,1[,\ \exists x \in E/\ \|\mathrm{Id}(x)\| > k\|x\|$ ce qui montre que

$$\boxed{\mathrm{Id} \notin \mathcal{S}.}$$

2.3 Soient φ et φ' deux éléments de $\mathcal{S}$. Il existe deux réels k et k' éléments de $[0,1[$ tels que, pour tout x de E, $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$ et $\|\varphi'(x)\| \leq k'\|x\|$. Mais alors, pour tout élément x de E,

$$\|\varphi \circ \varphi'(x)\| = \|\varphi(\varphi'(x))\| \leq k\|\varphi'(x)\| \leq kk'\|x\|.$$

Puisque le réel kk' est encore dans $[0,1[$, on a montré que $\varphi \circ \varphi'$ est dans $\mathcal{S}$.

En résumé, $\forall (\varphi, \varphi') \in (\mathsf{L}(E))^2,\ ((\varphi, \varphi') \in (\mathcal{S})^2 \Rightarrow \varphi \circ \varphi' \in \mathcal{S})$. Donc

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est stable pour } \circ.}$$

D'après la question 2.2, $\mathcal{S}$ ne contient pas Id qui est l'élément neutre de $\mathsf{GL}(E)$ pour $\circ$. Donc

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ n'est pas un sous-groupe de } (\mathsf{GL}(E), \circ).}$$

2.4 Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout x de E, $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$. Soit alors $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) &\Rightarrow (\varphi - \mathrm{Id})(x) = 0_E \Rightarrow \varphi(x) = x \\ &\Rightarrow \|\varphi(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq k\|x\| \\ &\Rightarrow (1-k)\|x\| \leq 0 \Rightarrow \|x\| \leq 0 \quad (\text{car } 1-k > 0) \\ &\Rightarrow x = 0_E. \end{aligned}$$

Réciproquement, $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de E et donc contient 0_E. Finalement,

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathsf{L}(E),\ (\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \{0_E\}).}$$

On en déduit encore que si $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi - \mathrm{Id}$ est injectif. Puisque $\varphi - \mathrm{Id}$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi - \mathrm{Id}$ est un automorphisme de E.

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathsf{L}(E),\ (\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi - \mathrm{Id} \in \mathsf{GL}(E)).}$$

2.5 Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Par définition, il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout x de E, $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$. Si maintenant x est un vecteur unitaire, on a $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\| = k$. Donc

$$\forall \varphi \in \mathsf{L}(E),\ (\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists k \in [0,1[/\ \forall x \in E,\ (\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq k).$$

Réciproquement, soit φ un endomorphisme de E tel que $\exists k \in [0,1[/\ \forall x \in E,\ (\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq k))$.

Soit x un vecteur non nul quelconque. Le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire et donc $\left\|\varphi\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leq k$. Ceci s'écrit encore $\left\|\dfrac{1}{\|x\|}\varphi(x)\right\| \leq k$ ou aussi $\dfrac{1}{\|x\|}\|\varphi(x)\| \leq k$ et finalement $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$. Cette dernière inégalité reste valable quand $x = 0$ car $\varphi(0_E) = 0_E$. On a ainsi fourni $k \in [0,1[$ tel que pour tout x de E, $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$ ce qui montre que $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\forall \varphi \in \mathsf{L}(E),\ ((\exists k \in [0,1[/\ \forall x \in E,\ (\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq k)) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{S}).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathsf{L}(E),\ (\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists k \in [0,1[/\ \forall x \in E,\ (\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq k)).}$$

2.6 Soit $\varphi \in L(E)$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base orthonormée dans laquelle la matrice de φ est diagonale à éléments diagonaux strictement inférieurs à 1 en valeur absolue. Il existe donc trois réels a_1, a_2 et a_3 éléments de $]-1,1[$ tels que $\varphi(e'_1) = a_1 e'_1$, $\varphi(e'_2) = a_2 e'_2$ et $\varphi(e'_3) = a_3 e'_3$.

Soit x un vecteur de norme 1. Posons $x = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + x_3 e'_3$. Alors,

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e'_1) + x_2\varphi(e'_2) + x_3\varphi(e'_3) = x_1 a_1 e'_1 + x_2 a_2 e'_2 + x_3 a_3 e'_3.$$

Posons $k = \text{Max}\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$. Puisque la base $\mathcal{B}'$ est orthonormée, on a

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{x_1^2 a_1^2 + x_2^2 a_2^2 + x_3^2 a_3^2} \leq \sqrt{k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = k\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = k.$$

Comme $k \in [0,1[$, on a montré (d'après la question 2.5) que $\varphi \in \mathcal{S}$.

3.

3.1 D'une part,

$$\|e'_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+1+1} = 1,\ \|e'_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1} = 1 \text{ et } \|e'_1\| = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1+1+4} = 1,$$

et d'autre part,

$$e'_1.e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1) = 0,\ e'_1.e'_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1+1-2) = 0 \text{ et } e'_2.e'_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1-1) = 0.$$

Donc, $\mathcal{B}'$ est une famille orthonormée et puisque $\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$,

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

3.2 $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\mu(e'_1) = \frac{1}{2}e'_1$.

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mu(e'_2) = \frac{1}{3}e'_2$.

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\mu(e'_3) = 0.e'_3$. Finalement,

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mu) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0).}$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est orthonormée et que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et 0 sont dans $]-1,1[$, la question 2.6 montre que

$$\boxed{\mu \in \mathcal{S}.}$$

4.

4.1 Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Posons $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ où x_1, x_2 et x_3 sont trois réels tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x) &= x_1\varphi_\alpha(e_1) + x_2\varphi_\alpha(e_2) + x_3\varphi_\alpha(e_3) = \alpha(x_1(e_1+e_3) + x_2(-e_1+e_2) + x_3(e_2-e_3)) \\ &= \alpha((x_1-x_2)e_1 + (x_2+x_3)e_2 + (x_1-x_3)e_3).\end{aligned}$$

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a alors

$$\begin{aligned}\|\varphi_\alpha(x)\|^2 &= \alpha^2\left((x_1-x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1-x_3)^2\right) = \alpha^2(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3) \\ &= \alpha^2(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3) \text{ (puisque } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \\ &= \alpha^2(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2)\end{aligned}$$

4.2 Les formules de changement de bases s'écrivent $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}X'$ ou encore plus explicitement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x'_3 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'_2 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x'_3 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \dfrac{2}{\sqrt{6}}x'_3 \end{pmatrix}.$$

Mais alors, $x_1 - x_2 - x_3 = 3\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'_1 = \sqrt{3}x'_1$. Puis $\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1 + (\sqrt{3}x'_1)^2) = \alpha^2(1 + 3x'^2_1)$.

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormée et donc on a aussi $x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = \|x\|^2 = 1$. Par suite,

$$x'^2_1 \leq x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 1 \text{ avec égalité si et seulement si } x'^2_2 + x'^2_3 = 0 \text{ c'est-à-dire } x'_2 = x'_3 = 0.$$

Donc,

$$\|\varphi_\alpha(x)\| = |\alpha|\sqrt{1 + 3x'^2_1} \leq |\alpha|\sqrt{1+3} = 2|\alpha| \text{ avec égalité si et seulement si } x'_2 = x'_3 = 0 \text{ et } x'^2_1 = 1 \text{ ou enfin } x = \pm e'_1.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in E,\ (\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|). \\ \text{De plus, si } \|x\| = 1,\ \|\varphi_\alpha(x)\| = 2|\alpha| \Leftrightarrow x = e'_1 \text{ ou } x = -e'_1. \end{array}}$$

4.3 • Si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$, posons $k = 2|\alpha|$. On a donc $k \in [0, 1[$ et, d'après la question 4.2, pour tout vecteur x unitaire, on a $\|\varphi_\alpha(x)\| \leq k$. Dans ce cas, d'après la question 2.6, $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$.

• Si $|\alpha| \geq \dfrac{1}{2}$, alors e'_1 est un vecteur unitaire tel que

$$\|\varphi_\alpha(e'_1)\| = 2|\alpha| \geq 1,$$

et donc

$$\forall k \in [0, 1[,\ \|\varphi_\alpha(e'_1)\| > k.$$

Dans ce cas, ,$\varphi_\alpha \notin \mathcal{S}$.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\varphi_\alpha \in \mathcal{S} \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{2}).}$$

5. **5.1** Soit M un point de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(O)M} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM} \\ &\Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)O} \\ &\Leftrightarrow (\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E},\ (f(M) = M \Leftrightarrow (\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}.}$$

5.2 Puisque φ est dans $\mathcal{S}$, la question 2.4 montre que $\varphi - \mathrm{Id}$ est dans $GL(E)$. Par suite, pour tout point M de $\mathcal{E}$,

$$f(M) = M \Leftrightarrow (\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}) \Leftrightarrow M = O + (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}).$$

$$\boxed{\text{si } \varphi \in \mathcal{S},\ f \text{ admet un et un seul point invariant, le point } \Omega = O + (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}).}$$

5.3 Pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

5.4

5.4.1 Soit $k \in [0,1[$ un réel tel que $\forall x \in E,\ \|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\|\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}\| = \|\varphi(\overrightarrow{\Omega M_n})\| \leq k\|\overrightarrow{\Omega M_n}\|,$$

et donc

$$\|\overrightarrow{\Omega M_n}\| \leq k^n\|\overrightarrow{\Omega M_0}\|.$$

Comme $k \in [0,1[$, k^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0.}$$

5.4.2 Soit f l'application affine d'expression analytique

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 \\ y' = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1 \end{array}\right. .$$

La partie linéaire de f est l'endomorphisme φ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{1/4} \text{ (M_α a été définie à la question 4).}$$

Puisque $|\frac{1}{4}| < \frac{1}{2}$, la question 4.3 montre que $\varphi \in \mathcal{S}$. Mais alors, la question 5.2 montre que l'application f a un point invariant Ω et un seul et la question 5.4.1 montre que si M_n est le point de coordonnées (x_n, y_n, z_n), la suite (M_n) converge vers Ω.

Déterminons alors le point Ω. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 \\ y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3y - z = 2 \\ -x + 5z = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -3x + 4 \\ 3(-3x+4) - z = 2 \\ -x + 5z = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -3x + 4 \\ 9x + z = 10 \\ -x + 5z = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\text{Les suites } (x_n),\ (y_n) \text{ et } (z_n) \text{ convergent et } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$$

