CONCOURS COMMUN SUP 2000
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)
Mardi 23 mai 2000 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLÈME D'ANALYSE

- $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :
  $\mathcal{E} = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \right\}$.
  $\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathcal{E}$ tels que :
  - f n'est pas la fonction identiquement nulle.
  - f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique. Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

3. Soit f dans $\mathcal{E}$; montrer que pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha\, x)$ est dans $\mathcal{E}$.

4. On fixe un élément f de $\mathcal{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :
  a. $f(0)$ vaut 0 ou 1.
  b. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
  c. Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

PARTIE II

A. On fixe ici un élément f de $\mathcal{E}$ tel que $f(0) = 1$.

1. Montrer que pour chaque réel $r > 0$, on a :
  a. $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du.$
  b. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x)\displaystyle\int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^{x} f(v)dv.$

2. a. Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\int_0^r f(y)dy$.

Dans la suite de ce **2.**, *on fixe un réel* $r > 0$ *qui vérifie :* $\int_0^r f(y)dy > 0$.

b. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer alors que f est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d. Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ c\, f'(x) = f(x+r) - f(x-r).$$

3. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \lambda\, f(x).$$

B. Conclusion

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = \mu\, y$, en séparant les cas : $\mu > 0$, $\mu < 0$ et $\mu = 0$.

2. En déduire tous les éléments de $\mathcal{E}$ en exploitant le **I.4.**c.

3. Donner tous les éléments de $\mathcal{F}$.

PARTIE III

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ et si $D_a = \left\{ a\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$,

tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

A.

1. Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

3. Prouver que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que : $a > 0$.

4. Montrer que : $\forall x \in [0, a[\,,\ f(x) > 0$.

B. On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(\omega\, x)$.

1. a. Soit $q \in \mathbb{N}$; montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

si $q \in \mathbb{N}$ est fixé : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)$.

2. Prouver que : $\forall x \in D_a,\ f(x) = g(x)$.

3. En déduire que $f = g$.

C. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.

PROBLÈME D'ALGÈBRE

Notations et objectifs :

- Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ algèbre des formes linéaires sur E.

  On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.

  Les éléments de E sont notés $M = (m_{i\,j})$, la matrice élémentaire $E_{i\,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.

  Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A\,.\,B$ leur produit.

  Si $M \in E$, on note $\mathrm{vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M

- L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

- Si $M = (m_{i\,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{k\,k}$.

  On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.

  A chaque matrice U de E, on associe :

  - L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U\,.\,M)$.
  - L'ensemble $H_U = \big\{M \in E \mid T(U\,.\,M) = 0\big\}$.

PARTIE I : Généralités, exemples

1. Quelques propriétés.

a. Montrer que T est une application linéaire.

b. Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^*.

c. Soit $U \in E$; reconnaître $\mathrm{Ker}\, T_U$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E.

2. *Dans cette question seulement,* on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Ecrire les quatre matrices élémentaires $E_{i\,j}$; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b. Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.

c. Trouver une matrice M de E telle que $T(U\,.\,M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}\, T_U$ puis la dimension de H_U.

d. Montrer que H_U possède une matrice inversible.

La partie **III** *propose une généralisation de ce résultat.*

PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit $A = (a_{i\,j})$ et $B = (b_{i\,j})$ des éléments de E.

a. Montrer que $T(A\,.\,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j\,i} b_{i\,j}$.

b. En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T({}^tA\,.\,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j\,i} b_{i\,j}.$$

$$(I_2) \quad T(B\,.\,A) = T(A\,.\,B)$$

2. Soit U dans E.

a. Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.

b. Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$. En déduire $\dim H_U$.

3. Pour $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$, on note $T_{i\,j} = T_{E_{j\,i}}$.

a. Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i\,j}(E_{k\,l})$ en utilisant (I_1).

b. En déduire que les n^2 éléments $T_{i\,j}$ de E^* permettent de définir une base de E^*.

4. Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E.

a. Quelle est sa dimension ?

b. Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H, montrer que : $E = H \oplus \operatorname{vect}(A)$.

c. Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \operatorname{Ker} l$.

d. Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

PARTIE III : Le résultat général

Pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E_{i\,i}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{i\,j})$ avec $\begin{cases} p_{i+1\,i} = 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1\,n} = 1 & \\ p_{i\,j} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$.

a. Montrer que P est inversible.

b. Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r}.

2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible. *Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1 . U . S_2 = R_r$.*