CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 1 : $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et $-I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ mais $I - I = 0_n \notin GL_n(\mathbb{R})$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{n,n}(\mathbb{R})$. A) est faux et B) est vrai.
$(GL_n(\mathbb{R}, .)$ est un groupe non commutatif pour $n \geqslant 2$ et est un groupe commutatif pour $n = 1$. Donc C) et D) sont faux.

Question 2 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 2 : Si $i \neq j$, on sait que $E_{i,j}E_{i,j} = 0$ et donc

$$(I + E_{i,j})(I - E_{i,j}) = I + E_{i,j} - E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,j} = I.$$

Donc, si $i \neq j$, $I + E_{i,j}$ est inversible et $(I + E_{i,j})^{-1} = I - E_{i,j}$. A) est vrai et B) est faux.

On sait que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ et donc

$$(I + E_{i,i})\left(I - \frac{1}{2}E_{i,i}\right) = I - \frac{1}{2}E_{i,i} + E_{i,i} - \frac{1}{2}E_{i,i} = I.$$

Donc, $I + E_{i,i}$ est inversible et $(I + E_{i,i})^{-1} = I - \frac{1}{2}E_{i,i}$. C) est vrai et D) est faux.

Question 3 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 3 : B), C) et D) sont faux car il y a la matrice nulle qui est non inversible dans la réponse proposée.
Ensuite, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec la matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la proposition A) est fausse.

On peut démontrer que

$$C(GL_n(\mathbb{R}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha E_{i,i},\ \alpha \in \mathbb{R}^*\right\} = \{\alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

Question 4 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 4 :

$$\left\{\begin{array}{l} e_1-e_2+e_3=e'_1\\ e_1+e_3+e_4=e'_2\\ e_2-e_3-e_4=e'_3\\ -e_1+e_2+e_4=e'_4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_4=-e_1-e_3+e'_2\\ e_1-e_2+e_3=e'_1\\ e_2-e_3-(-e_1-e_3+e'_2)=e'_3\\ -e_1+e_2+(-e_1-e_3+e'_2)=e'_4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_4=-e_1-e_3+e'_2\\ e_1-e_2+e_3=e'_1\\ e_1+e_2=e'_2+e'_3\\ -2e_1+e_2-e_3=-e'_2+e'_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_4=-e_1-e_3+e'_2\\ e_2=-e_1+e'_2+e'_3\\ e_1-(-e_1+e'_2+e'_3)+e_3=e'_1\\ -2e_1+(-e_1+e'_2+e'_3)-e_3=-e'_2+e'_4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_4=-e_1-e_3+e'_2\\ e_2=-e_1+e'_2+e'_3\\ 2e_1+e_3=e'_1+e'_2+e'_3\\ -3e_1-e_3=-2e'_2-e'_3+e'_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_4=-e_1-e_3+e'_2\\ e_2=-e_1+e'_2+e'_3\\ e_3=-2e_1+e'_1+e'_2+e'_3\\ -3e_1-(-2e_1+e'_1+e'_2+e'_3)=-2e'_2-e'_3+e'_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1=-e'_1+e'_2-e'_4\\ e_2=e'_1+e'_3+e'_4\\ e_3=3e'_1-e'_2+e'_3+2e'_4\\ e_4=-2e'_1+e'_2-e'_3-e'_4\end{array}\right. .$$

Donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.
Donc B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 5 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 5 : Pour $n=2$, les matrices $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont nilpotentes. $E_{1,2}\times E_{2,1}=E_{1,1}$ n'est pas nilpotente car $E_{1,1}^2=E_{1,1}$. B) est faux.
$E_{1,2}+E_{2,1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est non nilpotente et inversible. A) et C) sont faux. Enfin, il est connu que D) est vrai.

Partie II

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 6 : $u_n(\lambda f)=\left(\int_0^1 |\lambda f(t)|^n\ dt\right)^{\frac{1}{n}}=\left(|\lambda|^n\int_0^1 |f(t)|^n\ dt\right)^{\frac{1}{n}}=|\lambda|\left(\int_0^1 |f(t)|^n\ dt\right)^{\frac{1}{n}}=|\lambda|u_n(f)$.
D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 7 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 7 : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = 1$. Par continuité de f en x_0, il existe des réels u et v tels que $0 \leqslant u < v \leqslant 1$ et $x_0 \in [u,v]$ et $\forall x \in [u,v]$, $f(x) \geqslant 1-\varepsilon$ (y compris si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$). B) est vrai.

On suppose dorénavant que $\varepsilon \in]0,2[$ et que $f(x) \geqslant 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in [u,v]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(u_n(f))^n &= \int_0^u |f(t)|^n\ dt + \int_u^v |f(t)|^n\ dt + \int_v^1 |f(t)|^n\ dt \\ &\geqslant \int_u^v |f(t)|^n\ dt = \int_u^v f(t)^n\ dt \\ &\geqslant (v-u)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Puisque $1 - \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, on en déduit encore que $u_n(f) \geqslant (v-u)^{\frac{1}{n}}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. D'autre part, $u_n(f) \leqslant \left(\displaystyle\int_0^1 1\ dt\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v-u)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant u_n(f) \leqslant 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v-u)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $(v-u)^{\frac{1}{n}}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} = 1-\varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $1 - \varepsilon \leqslant u_n(f) \leqslant 1$.

On a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(f) = 1$. D) est vrai et donc A) et C) sont faux.

Question 8 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 8 : Si $M = 0$, alors la suite $(u_n(g))$ est nulle et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(g) = 0 = M$.

Sinon, $M > 0$. La fonction $f = \dfrac{1}{M}g$ est continue sur $[0,1]$ et a un maximum égal à 1. D'après les deux questions précédentes,

$$u_n(g) = u_n(Mf) = Mu_n(f) \to M.$$

Dans tous les cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(g) = M = |M|$. A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

Partie III

Question 9 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \leqslant 1$ puis $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$ après multiplication des deux membres par le réel positif $\cos^n t$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante. B) est vraie et A), C) et D) sont faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 10 : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. B) et C) sont vrais et A) et D) sont faux.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t \, dt = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (n+1)(-\sin t) \cos^n t \, dt \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^n t \, dt \\
&= (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right),
\end{aligned}$$

et donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Toutes les propositions sont fausses.

Question 12 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 : En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par I_{n+1}, on obtient pour tout entier naturel n, $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_n I_{n+1}$. Donc, la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geqslant 1}$ est constante puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ nI_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2},$$

et en particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$. A) est vrai et B) est faux.

Des questions 9 et 11, on déduit aussi que pour $n \geqslant 1$, $I_{n-2} \leqslant I_{n-1} \leqslant I_n$ puis

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_{n-2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant 1$$

I_n étant un réel strictement positif en tant qu'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. Le théorème des gendarmes fournit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 13 : $nI_n^2 = nI_{n-1}I_n\dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \to \dfrac{\pi}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$. A) est faux et B) est vrai.

En particulier, $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et donc $I_n \to 0$. C) et D) sont faux.

Question 14 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 14 : Pour tout entier naturel non nul n, on a $(2n)I_{2n} = (2n-2)I_{2n-2}$ et donc pour $n \geqslant 1$,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \times \frac{\pi}{2}.$$

C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 15 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : Soit $n \geqslant 1$.

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = (2n+1)\frac{2}{\pi}\frac{I_{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{(2n+1)}{\sqrt{n}\sqrt{2n}}\frac{2}{\pi}\sqrt{2nI_{2n}^2}$$

et donc $\dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. Donc B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 16 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 : Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\ dt = [-\ln|\cos t|]_0^x = -\ln|\cos x|.$$

A) et B) sont faux puis

$$F_2(x) = \int_0^x \tan^2 t\ dt = [\tan t - t]_0^x = \tan x - x.$$

C) est vrai et D) est faux.

Question 17 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 17 : Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2}(x) + F_n(x) = \int_0^x \tan^n t \left(1 + \tan^2 t\right) \, dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^x = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1}.$$

C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 18 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : D'après la question précédente,

$$F_4(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - F_2(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$$

B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 19 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t, de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $\tan t \leqslant 1$ puis $\tan^{n+1} t \leqslant \tan^n t$ après multiplication des deux membres par le réel positif $\tan^n t$. En intégrant on obtient $J_{n+1} \leqslant J_n$. La suite (J_n) est décroissante et minorée par 0. La suite (J_n) est donc convergente.
B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 20 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 20 : Soit $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^a \tan^n t \, dt + \int_a^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt \\ &\leqslant a \tan^n a + \left(\frac{\pi}{4} - a\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a bien sûr $J_n \leqslant \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{4} + a$. Donc A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : La suite (J_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. D'après la question C), pour tout entier naturel n, on a

$$J_{n+2} + J_n = \frac{1}{n+1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $2\ell = 0$ et donc $\ell = 0$. C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 22 : Pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ et donc $J_{2n} + J_{2n+2} = \dfrac{1}{2n+1}$. En tenant compte de $J_0 = \dfrac{\pi}{4}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(J_{2k} + J_{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k J_{2k} - (-1)^{k+1} J_{2(k+1)}\right)\\ &= (-1)^0 I_0 - (-1)^{n+1} J_{2n+2} \text{ (somme télescopique)}\\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2}$. D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 23 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 23 : Puisque $(-1)^n J_{2n}$ tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Mais on a aussi

$$1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4}.$$

Donc C) et D) sont vrais et A) et B) sont faux.

Partie IV

Question 24 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 24 : Si $\omega^p \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p}.$$

A) est faux et B) est vrai.Ensuite, si $\omega^p = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^p = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. C) est vrai et D) est faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 25 : D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega_k = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k\right) - 1 = \left(1+e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n - 1$$
$$= \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n\left(e^{-\frac{i\pi}{n}}+e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n - 1 = -2^n\cos^n\frac{\pi}{n} - 1.$$

D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 26 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 26 : On sait que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$. En évaluant en 0, on obtient $-1 = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\omega_k$ et donc $\prod_{k=0}^{n-1}\omega_k = (-1)^{n-1}$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C VRAI
d) FAUX

Explication 27 : B) et C) sont vrais et A) et D) sont faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : De même, $\left(1+j^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^{2k}$ et A) et B) sont faux puis

$$2^n + (1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(1+j^k+j^{2k}\right)$$

C) et D) sont faux.

Question 29 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : Un entier compris au sens large entre 0 et n est soit de la forme $3k$, soit de la forme $3k+1$, soit de la forme $3k+2$. De plus,

- $0 \leqslant 3k \leqslant n \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E\left(\dfrac{n}{3}\right)$
- $0 \leqslant 3k+1 \leqslant n \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{n-1}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E\left(\dfrac{n-1}{3}\right)$
- $0 \leqslant 3k+2 \leqslant n \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{n-2}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E\left(\dfrac{n-2}{3}\right)$

et donc

$$\begin{aligned}
Z_n &= \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k}+\left(j^2\right)^{3k}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+1}+\left(j^2\right)^{3k+1}\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k+2}\left(1+j^{3k+2}+\left(j^2\right)^{3k+2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k}+j^{6k}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+1}+j^{6k+2}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k+2}\left(1+j^{3k+2}+j^{6k+4}\right)
\end{aligned}$$

D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 30 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 : $1+j^{3k+1}+j^{6k+2} = 1+j+j^2 = 0$ et $1+j^{3k+2}+j^{6k+4} = 1+j^2+j = 0$. D'autre part, $1+j^{3k}+j^{6k} = 3$ et donc

$$Z_n = 3\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}.$$

A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 31 : $(1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n = (1+j)^n + \overline{(1+j)^n} = 2\mathrm{re}\left((1+j)^n\right)$. A) et B) sont faux. Ensuite,

$$(1+j)^n = \left(-j^2\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{\frac{in\pi}{3}},$$

et donc C) est faux puis

$$\left(1+j^2\right)^n = (-j)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{-\frac{in\pi}{3}},$$

et donc D) est vrai.

Question 32 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 32 : $+\left(1+j^2\right)^n = 2\mathrm{re}\left((1+j)^n\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et donc A) et B) sont faux puis $Z_n = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et donc

$$\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

C) est vrai et D) est faux.

Partie V

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 : Le déterminant du système est $\mathrm{Van}(1, j, j^2)$. Les trois nombres 1, j et j^2 sont deux à deux distincts. Donc, pour toutes valeurs de a, b et c, le système (S) admet une solution unique dans $\mathbb{C}^3$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 34 : En tenant compte de $1+j+j^2=0$, dans les quatre propositions, on a $x+y+z=a$.
Dans A) et D), $x+jy+j^2z \neq b$ et donc A) et D) sont faux. Dans B), $x+j^2y+jz \neq c$. Donc, B) est faux.
Enfin, avec la proposition C), en tenant compte de $j^3=1$.

- $x+y+z = \dfrac{3a+(1+j^2+j)b+(1+j^2+j)c}{3} = a.$
- $x+jy+j^2z = \dfrac{(1+j+j^2)a+3b+(1+j^2+j)c}{3} = b.$
- $x+j^2y+jz = \dfrac{(1+j^2+j)a+(1+j^2+j)b+3c}{3} = c.$

C) est vrai.

Question 35 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 35 : Si la solution est réelle, alors $x+y+z=a$ est un réel. Mais alors $b+c = 3\dfrac{a+b+c}{3} - a$ est réel et de même $bj+cj^2 = 3\dfrac{a+bj+cj^2}{3} - a$ et $bj^2+cj = 3\dfrac{a+bj^2+cj}{3} - a$ sont des réels.
Ensuite, $\left(bj+cj^2\right) - \left(bj^2+cj\right) = (j-j^2)(b-c) = i\sqrt{3}(b-c)$ est un réel puis $b-c$ est un imaginaire pur.
En résumé, $b+c \in \mathbb{R}$ et donc $\mathrm{Im}c = -\mathrm{Im}b$ et $b-c$ est un imaginaire pur et donc $\mathrm{Re}c = \mathrm{Re}b$. Finalement $c = \overline{b}$.

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}$ et $c = \overline{b}$, alors

- $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{a+b+\overline{b}}{3} = \dfrac{a+2\mathrm{Re}(b)}{3} \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{a+j^2b+jc}{3} = \dfrac{a+j^2b+\overline{j^2b}}{3} = \dfrac{a+2\mathrm{Re}(j^2b)}{3} \in \mathbb{R}$

- $\dfrac{a+jb+j^2c}{3} = \dfrac{a+jb+\overline{jb}}{3} = \dfrac{a+2\mathrm{Re}(jb)}{3} \in \mathbb{R}$

Une solution de (S) est réelle si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = \overline{c}$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 36 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : D'après la question précédente, A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

