

**CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES PILOTE DE LIGNE
ANNEE 2014
EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

Partie I

Question 1 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 1 : $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et $-I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ mais $I - I = 0_n \notin GL_n(\mathbb{R})$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{n,n}(\mathbb{R})$. A) est faux et B) est vrai.

$(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe non commutatif pour $n \geq 2$ et est un groupe commutatif pour $n = 1$. Donc C) et D) sont faux.

Question 2 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 2 : Si $i \neq j$, on sait que $E_{i,j}E_{i,j} = 0$ et donc

$$(I + E_{i,j})(I - E_{i,j}) = I + E_{i,j} - E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,j} = I.$$

Donc, si $i \neq j$, $I + E_{i,j}$ est inversible et $(I + E_{i,j})^{-1} = I - E_{i,j}$. A) est vrai et B) est faux.

On sait que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ et donc

$$(I + E_{i,i})\left(I - \frac{1}{2}E_{i,i}\right) = I - \frac{1}{2}E_{i,i} + E_{i,i} - \frac{1}{2}E_{i,i} = I.$$

Donc, $I + E_{i,i}$ est inversible et $(I + E_{i,i})^{-1} = I - \frac{1}{2}E_{i,i}$. C) est vrai et D) est faux.

Question 3 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 3 : B), C) et D) sont faux car il y a la matrice nulle qui est non inversible dans la réponse proposée.

Ensuite, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec la matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la proposition A) est fausse.

On peut démontrer que

$$C(GL_n(\mathbb{R})) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha E_{i,i}, \alpha \in \mathbb{R}^* \right\} = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

Question 4 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 4 :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} e_1 - e_2 + e_3 = e'_1 \\ e_1 + e_3 + e_4 = e'_2 \\ e_2 - e_3 - e_4 = e'_3 \\ -e_1 + e_2 + e_4 = e'_4 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_4 = -e_1 - e_3 + e'_2 \\ e_1 - e_2 + e_3 = e'_1 \\ e_2 - e_3 - (-e_1 - e_3 + e'_2) = e'_3 \\ -e_1 + e_2 + (-e_1 - e_3 + e'_2) = e'_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_4 = -e_1 - e_3 + e'_2 \\ e_1 - e_2 + e_3 = e'_1 \\ e_1 + e_2 = e'_2 + e'_3 \\ -2e_1 + e_2 - e_3 = -e'_2 + e'_4 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_4 = -e_1 - e_3 + e'_2 \\ e_2 = -e_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_1 - (-e_1 + e'_2 + e'_3) + e_3 = e'_1 \\ -2e_1 + (-e_1 + e'_2 + e'_3) - e_3 = -e'_2 + e'_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_4 = -e_1 - e_3 + e'_2 \\ e_2 = -e_1 + e'_2 + e'_3 \\ 2e_1 + e_3 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ -3e_1 - e_3 = -2e'_2 - e'_3 + e'_4 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_4 = -e_1 - e_3 + e'_2 \\ e_2 = -e_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = -2e_1 + e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ -3e_1 - (-2e_1 + e'_1 + e'_2 + e'_3) = -2e'_2 - e'_3 + e'_4 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = -e'_1 + e'_2 - e'_4 \\ e_2 = e'_1 + e'_3 + e'_4 \\ e_3 = 3e'_1 - e'_2 + e'_3 + 2e'_4 \\ e_4 = -2e'_1 + e'_2 - e'_3 - e'_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 5 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 5 : Pour $n = 2$, les matrices $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont nilpotentes. $E_{1,2} \times E_{2,1} = E_{1,1}$ n'est pas nilpotente car $E_{1,1}^2 = E_{1,1}$. B) est faux. $E_{1,2} + E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est non nilpotente et inversible. A) et C) sont faux. Enfin, il est connu que D) est vrai.**Partie II****Question 6 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 6 : $u_n(\lambda f) = \left(\int_0^1 |\lambda f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \left(|\lambda|^n \int_0^1 |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \left(\int_0^1 |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = |\lambda| u_n(f)$.

D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 7 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 7 : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 1$. Par continuité de f en x_0 , il existe des réels u et v tels que $0 \leq u < v \leq 1$ et $x_0 \in [u, v]$ et $\forall x \in [u, v]$, $f(x) \geq 1 - \varepsilon$ (y compris si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$). B) est vrai.

On suppose dorénavant que $\varepsilon \in]0, 2[$ et que $f(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in [u, v]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (u_n(f))^n &= \int_0^u |f(t)|^n dt + \int_u^v |f(t)|^n dt + \int_v^1 |f(t)|^n dt \\ &\geq \int_u^v |f(t)|^n dt = \int_u^v f(t)^n dt \\ &\geq (v - u) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Puisque $1 - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, on en déduit encore que $u_n(f) \geq (v - u)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. D'autre part, $u_n(f) \leq \left(\int_0^1 1 dt\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (v - u)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq u_n(f) \leq 1.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v - u)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $(v - u)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon$. Pour $n \geq n_0$, on a $1 - \varepsilon \leq u_n(f) \leq 1$.

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(f) = 1$. D) est vrai et donc A) et C) sont faux.

Question 8 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 8 : Si $M = 0$, alors la suite $(u_n(g))$ est nulle et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(g) = 0 = M$.

Sinon, $M > 0$. La fonction $f = \frac{1}{M}g$ est continue sur $[0, 1]$ et a un maximum égal à 1. D'après les deux questions précédentes,

$$u_n(g) = u_n(Mf) = M u_n(f) \rightarrow M.$$

Dans tous les cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(g) = M = |M|$. A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

Partie III**Question 9 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \leq 1$ puis $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ après multiplication des deux membres par le réel positif $\cos^n t$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \leq I_n$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante. B) est vraie et A), C) et D) sont faux.

Question 10 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 10 : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. B) et C) sont vrais et A) et D) sont faux.

Question 11 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t \, dt = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (n+1)(-\sin t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) (I_n - I_{n+2}), \end{aligned}$$

et donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Toutes les propositions sont fausses.

Question 12 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 12 : En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par I_{n+1} , on obtient pour tout entier naturel n , $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_nI_{n+1}$. Donc, la suite $(nI_nI_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2},$$

et en particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$. A) est vrai et B) est faux.

Des questions 9 et 11, on déduit aussi que pour $n \geq 1$, $I_{n-2} \leq I_{n-1} \leq I_n$ puis

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_{n-2}}{I_n} \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq 1$$

I_n étant un réel strictement positif en tant qu'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. Le théorème des gendarmes fournit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.

Question 13 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 13 : $nI_n^2 = nI_{n-1}I_n \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{I_n}{I_{n-1}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$. A) est faux et B) est vrai.

En particulier, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et donc $I_n \rightarrow 0$. C) et D) sont faux.

Question 14 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 14 : Pour tout entier naturel non nul n , on a $(2n)I_{2n} = (2n-2)I_{2n-2}$ et donc pour $n \geq 1$,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{\pi}{2}.$$

C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 15 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 15 : Soit $n \geq 1$.

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = (2n+1) \frac{2 I_{2n}}{\pi \sqrt{n}} = \frac{(2n+1) 2}{\sqrt{n} \sqrt{2n} \pi} \sqrt{2n I_{2n}^2}$$

et donc $\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Donc B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 16 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 16 : Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} dt = [-\ln|\cos t|]_0^x = -\ln|\cos x|.$$

A) et B) sont faux puis

$$F_2(x) = \int_0^x \tan^2 t dt = [\tan t - t]_0^x = \tan x - x.$$

C) est vrai et D) est faux.

Question 17 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 17 : Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2}(x) + F_n(x) = \int_0^x \tan^n t (1 + \tan^2 t) dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1} \right]_0^x = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1}.$$

C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 18 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 18 : D'après la question précédente,

$$F_4(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - F_2(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$$

B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 19 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t , de $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\tan t \leq 1$ puis $\tan^{n+1} t \leq \tan^n t$ après multiplication des deux membres par le réel positif $\tan^n t$. En intégrant on obtient $J_{n+1} \leq J_n$. La suite (J_n) est décroissante et minorée par 0. La suite (J_n) est donc convergente.

B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 20 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 20 : Soit $a \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Pour tout entier naturel n ,

$$J_n = \int_0^a \tan^n t dt + \int_a^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt \\ \leq a \tan^n a + \left(\frac{\pi}{4} - a \right).$$

D'autre part, on a bien sûr $J_n \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + a$. Donc A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

Question 21 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 21 : La suite (J_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. D'après la question C), pour tout entier naturel n , on a

$$J_{n+2} + J_n = \frac{1}{n+1} \left(\tan \frac{\pi}{4} \right)^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $2\ell = 0$ et donc $\ell = 0$. C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 22 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 22 : Pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ et donc $J_{2n} + J_{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$. En tenant compte de $J_0 = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (J_{2k} + J_{2k+2}) = \sum_{k=0}^n ((-1)^k J_{2k} - (-1)^{k+1} J_{2(k+1)}) \\ &= (-1)^0 J_0 - (-1)^{n+1} J_{2n+2} \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2}$. D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 23 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) VRAI

Explication 23 : Puisque $(-1)^n J_{2n}$ tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Mais on a aussi

$$1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

Donc C) et D) sont vrais et A) et B) sont faux.

Partie IV

Question 24 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 24 : Si $\omega^p \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p}.$$

A) est faux et B) est vrai. Ensuite, si $\omega^p = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^p = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. C) est vrai et D) est faux.

Question 25 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 25 : D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k \right) - 1 = \left(1 + e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^n - 1 \\ &= \left(e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^n \left(e^{-\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^n - 1 = -2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1. \end{aligned}$$

D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 26 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 26 : On sait que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$. En évaluant en 0, on obtient $-1 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$ et donc

$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 27 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- d) FAUX

Explication 27 : B) et C) sont vrais et A) et D) sont faux.

Question 28 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 28 : De même, $(1 + j^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k}$ et A) et B) sont faux puis

$$2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = \sum_{k=0}^n (1 + j^k + j^{2k})$$

C) et D) sont faux.

Question 29 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 29 : Un entier compris au sens large entre 0 et n est soit de la forme $3k$, soit de la forme $3k + 1$, soit de la forme $3k + 2$. De plus,

- $0 \leq 3k \leq n \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{n}{3} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E\left(\frac{n}{3}\right)$
- $0 \leq 3k + 1 \leq n \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{n-1}{3} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E\left(\frac{n-1}{3}\right)$
- $0 \leq 3k + 2 \leq n \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{n-2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E\left(\frac{n-2}{3}\right)$

et donc

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} (1 + j^{3k} + (j^2)^{3k}) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1} (1 + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1}) \\ &+ \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k+2} (1 + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} (1 + j^{3k} + j^{6k}) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1} (1 + j^{3k+1} + j^{6k+2}) + \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k+2} (1 + j^{3k+2} + j^{6k+4}) \end{aligned}$$

D) est vrai et A), B) et C) sont faux.

Question 30 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 30 : $1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1 + j^{3k+2} + j^{6k+4} = 1 + j^2 + j = 0$. D'autre part, $1 + j^{3k} + j^{6k} = 3$ et donc

$$Z_n = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}.$$

A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Question 31 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

Explication 31 : $(1 + j)^n + (1 + j^2)^n = (1 + j)^n + \overline{(1 + j)^n} = 2\operatorname{re}((1 + j)^n)$. A) et B) sont faux. Ensuite,

$$(1 + j)^n = (-j^2)^n = (e^{i\frac{\pi}{3}})^n = e^{\frac{in\pi}{3}},$$

et donc C) est faux puis

$$(1 + j^2)^n = (-j)^n = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^n = e^{-\frac{in\pi}{3}},$$

et donc D) est vrai.

Question 32 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 32 : $(1 + j^2)^n = 2\operatorname{re}((1 + j)^n) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et donc A) et B) sont faux puis $Z_n = 2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et donc

$$\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right).$$

C) est vrai et D) est faux.

Partie V

Question 33 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 33 : Le déterminant du système est $\operatorname{Van}(1, j, j^2)$. Les trois nombres 1, j et j^2 sont deux à deux distincts. Donc, pour toutes valeurs de a , b et c , le système (S) admet une solution unique dans \mathbb{C}^3 . B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 34 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

Explication 34 : En tenant compte de $1 + j + j^2 = 0$, dans les quatre propositions, on a $x + y + z = a$. Dans A) et D), $x + jy + j^2z \neq b$ et donc A) et D) sont faux. Dans B), $x + j^2y + jz \neq c$. Donc, B) est faux. Enfin, avec la proposition C), en tenant compte de $j^3 = 1$.

- $x + y + z = \frac{3a + (1 + j^2 + j)b + (1 + j^2 + j)c}{3} = a$.
- $x + jy + j^2z = \frac{(1 + j + j^2)a + 3b + (1 + j^2 + j)c}{3} = b$.
- $x + j^2y + jz = \frac{(1 + j^2 + j)a + (1 + j^2 + j)b + 3c}{3} = c$.

C) est vrai.

Question 35 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 35 : Si la solution est réelle, alors $x + y + z = a$ est un réel. Mais alors $b + c = 3 \frac{a + b + c}{3} - a$ est réel et

de même $bj + cj^2 = 3 \frac{a + bj + cj^2}{3} - a$ et $bj^2 + cj = 3 \frac{a + bj^2 + cj}{3} - a$ sont des réels.

Ensuite, $(bj + cj^2) - (bj^2 + cj) = (j - j^2)(b - c) = i\sqrt{3}(b - c)$ est un réel puis $b - c$ est un imaginaire pur.

En résumé, $b + c \in \mathbb{R}$ et donc $\operatorname{Im}c = -\operatorname{Im}b$ et $b - c$ est un imaginaire pur et donc $\operatorname{Re}c = \operatorname{Re}b$. Finalement $c = \bar{b}$.

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}$ et $c = \bar{b}$, alors

- $\frac{a + b + c}{3} = \frac{a + b + \bar{b}}{3} = \frac{a + 2\operatorname{Re}(b)}{3} \in \mathbb{R}$
- $\frac{a + j^2b + jc}{3} = \frac{a + j^2b + \overline{j^2b}}{3} = \frac{a + 2\operatorname{Re}(j^2b)}{3} \in \mathbb{R}$

$$\bullet \frac{a + jb + j^2c}{3} = \frac{a + jb + \overline{jb}}{3} = \frac{a + 2\operatorname{Re}(jb)}{3} \in \mathbb{R}$$

Une solution de (S) est réelle si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = \overline{c}$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 36 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

Explication 36 : D'après la question précédente, A) est vrai et B), C) et D) sont faux.