CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2013

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 : $E(0)+E(0)=2I$ et $E(0\times 0)=I$. Donc A) est faux. De même $E(0^2)=I$ et $2E(0)=2I$. Donc D) est faux.

Pour tous réels t et s,

$$\begin{aligned}E(t)E(s) &= \left(I+tA+\frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I+sA+\frac{s^2}{2}A^2\right)\\ &= I+(t+s)A+\left(\frac{t^2}{2}+ts+\frac{s^2}{2}\right)A^2 \text{ (car pour } k\geqslant 3,\ A^k=0)\\ &= I+(t+s)A+\frac{(t+s)^2}{2}A^2=E(t+s).\end{aligned}$$

Dons B) est vrai puis $[E(t)]^n=E(t)\times\ldots\times E(t)=E(t+\ldots+t)=E(nt)$ et donc C) est vrai.

Question 2 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 2 : Pour tout réel t, $E(t)E(-t)=E(t+(-t))=E(0)=I=E(-t)E(t)$. Donc, pour tout réel t, la matrice $E(t)$ est inversible et a pour inverse $E(-t)$. Donc A) est faux.
$E(0)=I$ est inversible d'inverse $I\neq -I=-E(0)$ et donc B) est faux.
L'inverse de $E(1)$ est $E(-1)=I-A+\dfrac{1}{2}A^2$. D'autre part, $E(1/1)=I+A+\dfrac{1}{2}A^2$. Cette matrice n'est pas $E(-1)$ car sinon $-A=A$ puis $A=0$ ce qui n'est pas. Donc, C) est faux.
On prend $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. A est nilpotente d'indice 3 mais $E(1)=\begin{pmatrix}1&1&1/2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ n'est pas symétrique. Donc D) est faux.

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 3 : $E(0)+E(0)=2I\neq I=E(0+0)$. Donc A) est faux. Par suite, les raisons données en B) et C) sont de mauvaises raisons et donc B) et C) sont faux.

Montrons que $\left(I,A,A^2\right)$ est libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha I+\beta A+\gamma A^2=0$. On multiplie les deux membres de cette égalité par A^2 et on obtient $\alpha A^2=0$ et donc $\alpha=0$ car $A^2\neq 0$. Il reste $\beta A+\gamma A^2=0$. Après multiplication par A, il reste $\beta A^2=0$ et donc $\beta=0$. Il reste $\gamma A^2=0$ et donc $\gamma=0$.

Ainsi, la famille $\left(I,A,A^2\right)$ est libre. Montrons que l'application $t\mapsto E(t)$ est injective. Pour tous réels t et s

$$\begin{aligned}E(t)=E(t')&\Rightarrow I+tA+\frac{t^2}{2}A^2=I+sA+\frac{s^2}{2}A^2\\&\Rightarrow t=s\text{ et }\frac{t^2}{2}=\frac{s^2}{2}\text{ (car }\left(I,A,A^2\right)\text{ est libre)}\\&\Rightarrow t=s.\end{aligned}$$

Donc D) est vrai.

Question 4 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 4 : $(x,y)\in F\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-6y=0\\x-3y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3y$ et $(x,y)\in G\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x-6y=0\\x-2y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2y$.
F est la droite vectorielle engendrée par $u=(3,1)$ et G est la droite vectorielle engendrée par $v=(2,1)$. Donc C) est vrai.
$G\neq\{0\}$ et donc A) est faux. u et v ne sont pas colinéaires et donc B) est faux.
Deux droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et donc D) est vrai.

Question 5 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 5 : P^{-1} est la matrice de la base canonique à la base (u,v). Donc, $P^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$ puis $P=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$. D'autre part,

$$D=\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f)=\mathscr{P}_{(u,v)\to(e_1,e_2)}\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f)\mathscr{P}_{(e_1,e_2)\Rightarrow(u,v)}=PAP^{-1}.$$

Puisque $f(u)=2u$ et que $f(v)=v$, $D=\mathrm{diag}(2,1)$ puis, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}A^n=P^{-1}D^nP&=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 2^n&2\\2^n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\times 2^n-2&-6\times 2^n+6\\2^n-1&-2\times 2^n+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 2^n-2&-3\times 2^{n+1}+6\\2^n-1&-2^{n+1}+3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc C) est vrai et D) est faux.

Question 6 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité de TAYLOR à l'ordre n pour $t \geqslant 0$ est

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \sup\{\left|g^{(n+1)}(x)\right|,\ x \in [0, t]\},$$

et pour $t \leqslant 0$

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \sup\{\left|g^{(n+1)}(x)\right|,\ x \in [t, 0\}.$$

Donc A) et B) sont faux. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre n pour $t \geqslant 0$, on obtient

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{n+1} g(t)}{(n+1)!},$$

et pour $t \leqslant 0$

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!}.$$

C) et D) sont faux. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{n+1} e^{|t|}}{(n+1)!}.$$

Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que pour tout réel t, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{t^{n+1} e^{|t|}}{(n+1)!}$ et donc pour tout réel t,

$$e^t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

Question 7 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 7 : D'après la question 5, pour tout réel t et tout entier naturel n,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 3 \times 2^k - 2 & -3 \times 2^{k+1} + 6 \\ 2^k - 1 & -2^{k+1} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} & -6 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} & -2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3g(2t) - 2g(t) & -6g(2t) + 6g(t) \\ g(2t) - g(t) & -2g(2t) + 3g(t) \end{pmatrix} = g(2t) \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + g(t) \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : $Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Q \neq I$ et $R^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = R \neq I$.
Donc q et r sont des projections distinctes de Id et A) est faux.

$QR = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 0$ et $RQ = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$.
Donc $q \circ r = r \circ q = 0$ puis $\mathrm{Im} r \subset \mathrm{Ker} q$. B) est vrai.
L'image de q est engendrée par les colonnes de Q et donc $\mathrm{Im} q = \mathrm{Vect}(u) = F$. De même, $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Vect}(v) = G$. Puisque $\mathrm{Im} r \subset \mathrm{Ker} q$ et que $\mathrm{Ker} q$ est de dimension 1, on a $\mathrm{Ker} q = \mathrm{Im} r = G$ et de même $\mathrm{Ker} r = \mathrm{Im} q = F$.
q est la projection sur F parallèlement à G et r est la projection sur G parallèlement à F. C) est vrai et D) est faux.

Partie II

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 9 : Si $a = 0$, $f_a(t) = 1$ tend vers 1 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et si $a > 0$, $f_a(t) = e^{a \ln t}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures car $a \ln t$ tend vers $-\infty$. Donc A), B) et C) sont faux et D) est vrai.

Question 10 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 10 : Pour tout réel $a \geqslant 0$, la fonction f_a est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $t > 0$, $f_a'(t) = at^{a-1}$. C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 11 : Si $a \geqslant 1$, $f_a' = af_{a-1}$ a une limite réelle en 0 d'après la question 9. Comme d'autre part, f_a est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, un théorème classique d'analyse montre que f_a est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Donc A), B) et C) sont faux (pour C), f_1' tend vers 1 quand x tend vers 0) et D) est vrai.

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : Pour tous réels positifs a et b, $h_{a,b}(t)$ tend vers $\widetilde{f_a}(0)f_b(1)$ quand t tend vers 0 et vers $f_a(1)\widetilde{f_b}(0)$ quand t tend vers 1. Donc A) et B) sont faux. Pour tout couple (a, b) de réels positifs, on peut définir le prolongement par continuité $\widetilde{h_{a,b}}$ de $h_{a,b}$ à $[0, 1]$.

$h_{a,b}$, n'étant pas définie sur $[0,1]$, ne peut être de classe C^1 sur $[0,1]$. Donc C) et D) sont faux. Néanmoins, si $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, $\widetilde{h_{a,b}}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Si $a < 1$, puisque $\widetilde{h_{a,b}} \sim f_a(t)$ quand t tend vers 0 et que f_a n'est pas dérivable en 0, la fonction $\widetilde{h_{a,b}}$ n'est pas de classe C^1 sur $[0,1]$. De même si $b < 1$, la fonction $\widetilde{h_{a,b}}$ n'est pas de classe C^1 sur $[0,1]$.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 13 : $h_{a,b}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeante par continuité en 0 et en 1 et donc $I(a,b)$ existe. Donc A) est faux et B) est vrai.

En posant $u = 1-t$, on obtient

$$I(a,b) = \int_0^1 f_a(t)f_b(1-t)\ dt = \int_1^0 f_a(1-u)f_b(u)\ (-du) = \int_0^1 f_b(u)f_a(1-u)\ du = I(b,a).$$

Donc C) est faux et D) est vrai.

Question 14 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 : Soient a et b deux réels positifs. Puisque $a+1 \geqslant 1$ et $b+1 \geqslant 1$, les fonctions $t \mapsto f_{a+1}(t)$ et $t \mapsto -\dfrac{b_{b+1}(1-t)}{b+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I(a+1,b) &= \int_0^1 f_{a+1}(t)f_b(1-t)\ dt \\
&= \left[f_{a+1}(t) \times -\frac{f_{b+1}(1-t)}{b+1}\right]_0^1 + \int_0^1 (a+1)f_a(t)\frac{f_{b+1}(1-t)}{b+1}\ dt = \frac{a+1}{b+1}\int_0^1 f_a(t)f_{b+1}\ dt \\
&= \frac{a+1}{b+1} I(a,b+1)\ (f_{a+1}(0) = 0 \text{ car } a+1 > 0\ldots),
\end{aligned}$$

et donc $(b+1)I(a+1,b) = (a+1)I(a,b+1)$. A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : Pour $a \geqslant 0$, $I(a,0) = \displaystyle\int_0^1 t^a\ dt = \frac{1}{a+1}$. A) est faux et B) est vrai.

Soit $n \geqslant 1$.

$$I(a,n) = I(n,a) = \frac{n}{a+1}I(n-1,a+1) = \frac{n}{a+1} \times \frac{n-1}{a+2} \times \ldots \times \frac{1}{a+n}I(0,a+n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)}.$$

Donc C) et D) sont faux.

Question 16 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 16 : Donc $I(p,q) = \dfrac{p!}{(q+1)\dots(q+p+1)} = \dfrac{p!q!}{1\dots q(q+1)\dots(q+p+1)} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$. A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Question 17 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 17 : Soient p et q deux entiers naturels. On pose $t = \sin^2\theta$ et donc $dt = 2\sin\theta\cos\theta$ et $\cos^2\theta = 1-t$. On obtient

$$J(p,q) = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\right)^p \left(\cos^2\theta\right)^q \sin\theta\cos\theta\ d\theta = \int_0^1 t^p(1-t)^q \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}I(p,q),$$

et donc

$$J(p,q) = \frac{p!q!}{2(p+q+1)!}.$$

A), B) et D) sont faux et C) est vrai.

Question 18 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 18 : Soit $\alpha > 0$. Pour tout réel x,

$$f_\alpha(x) \text{ existe} \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-\alpha}{x} > 0 \Leftrightarrow x > \alpha \text{ ou } x < 0.$$

L'ensemble de définition de g_α est donc $]-\infty, 0[\cup]\alpha, +\infty[$. C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 19 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 19 : Soit $x > \alpha$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]x-\alpha, x[$ tel que $\ln x - \ln(x-\alpha) = |x-(x-\alpha)| \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{\alpha}{c}$.

Ceci montre que $\displaystyle\inf_{y\in[x-\alpha,x]} \frac{|x-(x-\alpha)|}{y} \leqslant \ln x - \ln(x-\alpha) \leqslant \sup_{y\in[x-\alpha,x]} \frac{|x-(x-\alpha)|}{y}$ donc A) est faux et B) est vrai. On en déduit plus simplement que

$$\frac{\alpha}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{x-\alpha}.$$

Comme $-(\ln x - \ln(x-\alpha)) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) = \frac{g_\alpha(x)}{x}$, on a encore

$$g_\alpha(x) = -x(\ln x - \ln(x-\alpha)),$$

et donc cela fournit aussi $-\frac{\alpha x}{x-\alpha} \leqslant g_\alpha(x) \leqslant -\alpha$. C) est faux et D) est vrai.

Question 20 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 20 : g_α est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et pour $x > \alpha$,

$$g'_\alpha(x) = \ln(x-\alpha) - \ln x + x\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x}\right) = \ln(x-\alpha) - \ln x + \frac{x-\alpha+\alpha}{x-\alpha} - 1 = \ln(x-\alpha) - \ln x + \frac{\alpha}{x-\alpha},$$

puis

$$g''_\alpha(x) = \frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} = \frac{x(x-\alpha) - (x-\alpha)^2 - \alpha x}{x(x-\alpha)^2} = -\frac{\alpha^2}{x(x-\alpha)^2} < 0.$$

La fonction g'_α est donc strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.
Puisque d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} g'_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) + \frac{\alpha}{x-\alpha} = 0$, la fonction g'_α est strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.
Finalement, la fonction g_α est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$. C) est vrai et A), B) et D) sont faux.

Question 21 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 21 : L'encadrement D) de la question 19 et le théorème des gendarmes montrent que g_α tend vers $-\alpha$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, C_α admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\alpha$. D'autre part, quand x tend vers α par valeurs supérieures, $g_\alpha(x)$ tend vers $-\infty$ et donc C_α admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$. A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 22 : Pour $n > \alpha$, $y_n = e^{n\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} = e^{g_\alpha(n)}$. Donc A) est faux.
La suite $(g_\alpha(n))_{n>\alpha}$ est croissante car la fonction g_α est croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et donc la suite (y_n) est croissante car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc B) est vrai et C) est faux.
Enfin, la suite $g_n(\alpha)$ converge vers $-\alpha$ d'après la question 21 et donc la suite (y_n) converge vers $e^{-\alpha}$ par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier en $-\alpha$. D) est vrai.

Question 23 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 23 : A) est vrai car $x \geqslant 0$. En posant $t = \dfrac{u}{n}$, on obtient

$$F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n (nu)^x \, n dt = n^{x+1} \int_0^1 t^x (1-t)^n \, dt = n^{x+1} I(x,n).$$

Donc C) est vrai et B) et D) sont faux.

Question 24 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul.
Soit $u \in]0,n[$. Puisque g_u est croissante sur $]u,+\infty[$ et que $u < n < n+1$, on a $g_u(n) \leqslant g_u(n+1)$ ou encore $n \ln\left(1 - \dfrac{u}{n}\right) \leqslant (n+1)\ln\left(1 - \dfrac{u}{n+1}\right)$ ou enfin

$$\ln\left(\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1}\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout u de l'intervalle $]0,n[$, $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}$ puis que pour tout u de l'intervalle $]0,n[$

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \leqslant \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x.$$

Cette inégalité reste valable pour $u = 0$ et $u = n$ par continuité en 0 et en n. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, du \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \, du.$$

C) et D) sont faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 25 : Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \, du = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \, du + \int_n^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \, du \\ &> \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, du + 0 = F_n(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 26 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 26 : Soient x un réel positif et n un entier naturel non nul. Puisque la fonction g_u est croissante sur $]u, +\infty[$, pour tout u de $]0, n[$, on a $g_u(n) \leqslant \lim_{t \to +\infty} g_u(t)$. Or, quand t tend vers $+\infty$,

$$g_u(t) = t \ln\left(1 - \frac{u}{t}\right) \sim t \times \left(-\frac{u}{t}\right) = -u.$$

Par suite, pour tout $u \in]0, n[$, $g_u(n) \leqslant -u$. A) est vrai et B) est faux. On en déduit que pour tout $u \in]0, n[$

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x = e^{g_n(u)} u^x \leqslant e^{-u} u^x.$$

Cette inégalité reste valable pour $u = 0$ et $u = n$ par continuité en 0 et en n. En intégrant, on obtient $F_n(x) \leqslant \int_0^n e^{-u} u^x \, du$. D) est vrai et C) est faux.

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C FAUX
d) FAUX

Explication 27 : Soit x un réel positif ou nul. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{u \to +\infty} u^{x+2} e^{-u} = 0$. Donc il existe un réel $U > 0$ tel que pour tout $u \geqslant U$, $u^{x+2} e^{-u} \leqslant 1$ ou encore $e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}}$. B) est vrai et A) est faux.

Soit alors n un entier supérieur ou égal à U.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &\leqslant \int_0^n e^{-u} u^x \, du = \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \int_U^n e^{-u} u^x \, du \\
&\leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \int_U^n \frac{u^x}{u^{x+2}} \, du \\
&\leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \int_U^n \frac{1}{u^2} \, du = \int_0^U e^{-u} u^x \, du - \frac{1}{n} + \frac{1}{U} \\
&\leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \frac{1}{U}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de C) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. C) et D) sont faux.

Question 28 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : Soit x un réel positif. D'après la question précédente, il existe un réel $U > 0$ et un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$

$$F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \frac{1}{U}.$$

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n(x) \leqslant \text{Max}\left\{F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n_0}(x), \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \frac{1}{U}\right\}.$$

Ainsi, la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est majorée. Comme d'autre part, la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante d'après la question 25, on en déduit que la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente. A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Question 29 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : A) est faux d'après la question précédente. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
F_n(x+1) &= \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x\,du = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n+1}u^{x+1}\right]_0^n + \frac{n(x+1)}{n+1}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^{n+1}u^x\,du \\
&= \frac{n(x+1)}{n+1}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \left(1-\frac{u}{n}\right)u^x\,du \\
&= \frac{n(x+1)}{n+1}\left[\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x\,du - \frac{1}{n}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{x+1}\,du\right] \\
&= \frac{n(x+1)}{n+1}\left(F_n(x) - \frac{1}{n}F_n(x+1)\right)
\end{aligned}$$

Par suite $\left(1+\dfrac{x+1}{n+1}\right)F_n(x+1) = \dfrac{n(x+1)}{n+1}F_n(x)$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 0,\ F_n(x+1) = \frac{n(x+1)}{x+n+2}F_n(x)$$

B) est vrai. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \geqslant 0,\ F(x+1) = (x+1)F(x).$$

Donc C) est faux. Ensuite, $F_n(0) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $F(0) = 1$. Mais alors, pour $k \geqslant 1$,

$$F(k) = kF(k-1) = k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \times F(0) = k!,$$

et donc D) est vrai.

Partie III

Question 30 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 30 : Sur I, (E) est équivalente à : $y' + \dfrac{x-2}{(x-1)^2}y = 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ est continue sur I et donc l'ensemble des solutions de (E) sur I est une droite vectorielle. A) est faux et B) est vrai.

Soit f une fonction dérivable sur I

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{x-2}{(x-1)^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}} f'(x) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) e^{\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}} f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left((1-x)e^{-\frac{1}{1-x}} f\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}} f(x) = K \\
&\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}} f(x) = K \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Donc C) est vrai et D) est faux.

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 31 : Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) e^{1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)} \\
&= e\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) e^{x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)} \\
&= e\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \left(1 + \left(x + x^2 + x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x + x^2\right)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&= e\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&= e\left(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{34}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc, A) et B) sont faux. D'autre part,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-x} e^{-\frac{1}{1-x}} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) e^{-1 - x - x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)} \\
&= e^{-1}\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) e^{-x - x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)} \\
&= e^{-1}\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \left(1 + \left(-x - x^2 - x^3\right) + \frac{1}{2}\left(-x - x^2\right)^2 + \frac{1}{6}(-x)^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&= e^{-1}\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&= e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc C) est vrai et D) est faux.

Question 32 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : Pour $n = 0$, on a pour tout réel x de I : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} = P_0\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ avec $P_0(X) = X$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout réel x de I, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^2}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}\left(P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)e^{\frac{1}{1-x}} \\
&= P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}
\end{aligned}$$

avec $P_{n+1} = X^2\left(P_n(X) + P_n'(X)\right)$. Donc C) est faux et D) est vrai.

Ensuite, $P_1(X) = X^2\left(P_0(X) + P_0'(X)\right) = X^2(X+1) = X^3 + X^2$ (donc B) est faux.
Puis $P_2(X) = X^2(X^3 + X^2 + 3X^2 + 2X) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$ et $P_3(X) = X^2(X^5 + 4X^4 + 2X^3 + 5X^4 + 16X^3 + 6X^2) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$ et A) est vrai.

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 : Puisque f est solution de (E) sur I, pour tout x de I on a

$$(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x).$$

En dérivant n fois cette égalité ($n \geqslant 1$), la formule de LEIBNIZ permet décrire (y compris quand $n = 1$)

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x).$$

Après simplification par $e^{\frac{1}{1-x}}$, on obtient pour tout x de I,

$$(1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) + ((2n+1)x - 2n - 2)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n^2 P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0.$$

Ensuite, $X = \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{1}{X}$, X décrivant $]0, +\infty[$ et on a pour tout $X > 0$,

$$\frac{1}{X^2}P_{n+1}(X) + \left((2n+1)\left(1 - \frac{1}{X}\right) - 2n - 2\right)P_n(X) + n^2 P_{n-1}(X) = 0$$

et donc

$$P_{n+1}(X) = \left((2n+1)X + X^2\right)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X).$$

Cette égalité est vraie pour une infinité de valeurs de X et donc pour tout X, et ceci pour tout $n \geqslant 1$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 34 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 34 : $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)e^1 = eP_n(1)$. Quand $X = 0$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = eP_{n+1}(1) = (2n+2)eP_n(1) - n^2eP_{n-1}(1) = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}.$$

Par suite, A) est vrai et B) est faux. De plus, $a_0 = f(0) = e$ puis $a_1 = f'(0) = P_1(1)e^1 = 2e$ d'après la question 32. Ensuite,

$$a_2 = 4a_1 - a_0 = 7e,\ a_3 = 6a_2 - 4a_1 = 34e \text{ et } a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209.$$

La formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 4 fournit alors quand x tend vers 0

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + o\left(x^4\right) = e\left(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{34}{6}x^2 + \frac{209}{24}x^4 + o\left(x^4\right)\right).$$

Donc C) est vrai et D) est faux.

Question 35 :
A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 35 : $S_p(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{k!}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} = u_p$. Ensuite, pour p entier naturel non nul

$$S_p(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(k+1)!}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} = u_{p-1} + u_p.$$

A) est faux et B) est vrai. Puisque u_p tend vers e d'après la question 6 de la partie I, les suites $(S_p(0))$ et $(S_p(1))$ convergent respectivement vers e et $2e$. C) est vrai et D) est faux.

Question 36 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 36 :

$$\begin{aligned}
S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{(n+1+k)!}{(k!)^2} - (2n+2)\sum_{k=0}^{p} \frac{(n+k)!}{(k!)^2} + n^2 \sum_{k=0}^{p} \frac{(n-1+k)!}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{(n-1+k)![(n+1+k)(n+k) - (2n+2)(n+k) + n^2]}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{(n-1+k)![(1-2+1)n^2 + (2k+1-2-2k)n + k^2 - k]}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{(n-1+k)![-n-k+k^2]}{(k!)^2} = -\sum_{k=0}^{p} \frac{(n+k)!}{(k!)^2} + \sum_{k=0}^{p} \frac{(n-1+k)!k^2}{(k!)^2} \\
&= -S_p(n) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(n+(k-1))!}{((k-1)!)^2} = -S_p(n) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(n+k)!}{(k!)^2} \\
&= S_{p-1}(n) - S_p(n) = -\frac{(n+p)!}{(p!)^2}.
\end{aligned}$$

Donc A) est vrai et B) est faux.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(n) = a_n$.

- D'après les questions 35 et 34, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(0) = e = a_0$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(1) = 2e = a_1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(n-1) = a_{n-1}$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(n) = a_n$.

Puisque $S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n)$, quand p tend vers $+\infty$, $S_p(n+1)$ tend vers $(2n+2)a_n - n^2 a_{n-1} + a_n - a_n = a_{n+1}$ d'après la question 34.

Le résultat est démontré par récurrence.

$\dfrac{(n+k)!}{(k!)^2} = \dfrac{(n+k)!}{n!k!} \times \dfrac{n!}{k!} = n!\dbinom{n+k}{n}\dfrac{1}{k!}$ et donc

$$a_n = \lim_{p\to+\infty} S_p(n) = \lim_{p\to+\infty} n!\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n}\frac{1}{k!}.$$

C) est vrai et D) est faux.

