CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 1 : f_1, f_2 et f_3 sont éléments de E et $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc A) est vrai et B) est faux.

$f_1^2(x) = e^{2x}$. S'il existe a, b et c tels que $f_1^2 = af_1 + bf_2 + cf_3$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = ae^x + be^{-x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ puis

$$1 = ae^{-x} + be^{-3x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-3x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Quand x tend vers $+\infty$, on obtient $1 = 0$ ce qui est une contradiction. Donc $f_1 \times f_1 \notin F$ et C) et D) sont faux.

Question 2 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 2 : La dérivée d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la dérivation est linéaire. Donc D est un endomorphisme de E et en particulier une application linéaire sur E. Donc A) et C) sont vrais et B) et D) sont faux.

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 3 : KerD est constitué des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Donc A) et D) sont faux.

ImD contient f_1 qui n'est pas constante et donc B) est faux. Enfin, l'image d'un endomorphisme contient toujours 0 et donc C) est faux.

Question 4 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 4 : Soit f un élément de E. f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier est continue sur $\mathbb{R}$. f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est un élément de E tel que $D(F) = f$. Donc $\mathrm{Im}D = E$ ou encore D est surjective. A) est vrai et B) et C) sont faux.

$\mathrm{Ker}D$ n'est pas réduit à 0 et donc D n'est pas injective. D) est vrai.

Question 5 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} ae^t + be^{-t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) &\underset{t\to 0}{=} a\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + b\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right)\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\right) \\ &\quad + c\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) \\ &= (a + c) + \left(a + b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Donc B) est vrai et A), C) et D) sont faux (C n'est pas un développement limité à l'ordre 2).

Question 6 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 6 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Si $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, alors en particulier $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t\to 0}{=} o(t^2)$. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} a + c = 0 \\ a + b\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2} = 0 \\ \dfrac{a}{2} - \dfrac{b\sqrt{3}}{4} - \dfrac{c}{4} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -a \\ \dfrac{3a}{2} + b\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \dfrac{3a}{4} - \dfrac{b\sqrt{3}}{4} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -a \\ b = -\sqrt{3}a \\ b = \sqrt{3}a \end{array}\right. \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. A) est vrai et B) est faux. Puisque d'autre part, (f_1, f_2, f_3) est par définition une famille génératrice de F, on en déduit que (f_1, f_2, f_3) est une base de F. C) est vrai et D) est faux.

Question 7 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 : $D(f_1) = f_1 \in F$. $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \in F$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3 \in F$. Puis

$$D(F) = \text{Vect}(D(f_1), D(f_2), D(f_3)) = \text{Vect}\left(f_1, -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3, -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) \subset \text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = F.$$

F est stable par D et donc D induit un endomorphisme de F. B) est vrai et A) et D) sont faux. Enfin, E est de dimension infinie et donc C) est faux.

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : $\mathcal{B}$ est une base de F et D_F est une endomorphisme de F. Les égalités $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$ fournissent

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc C) et D) sont faux. Enfin, M n'est ni symétrique, ni antisymétrique (car les coefficients diagonaux ne sont pas nuls) et donc A) est faux et B) est vrai.

Question 9 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 9 : $\det(M) = 1 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 1 \neq 0$. Donc, C) est vrai et A) est faux. Une matrice inversible de format 3 a un rang égal à 3 et donc D) est faux. Enfin, M est la matrice d'une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ (dans une certaine base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$) et donc $M^3 = I_3$. Par suite, l'inverse de M est M^2. B) est vrai.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 10 : Puisque M est inversible, D est un automorphisme de F. Donc B) est vrai et A) et C) sont faux. L'inverse de M est M^2 et donc la réciproque de D_F est D_F^2. D) est vrai.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 11 : L'ensemble de départ de φ est F^2 et donc φ n'est pas un produit scalaire sur E. A) est faux. La bilinéarité, la symétrie et la positivité de φ sont claires (donc D) est faux).

Soit $f = af_1 + bf_2 + cf_3 \in F$.

$$\varphi(f,f) = 0 \Rightarrow f(0)^2 + f'(0)^2 + f''(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

La formule de Taylor-Young et la question 5 fournissent $a + c = a + \dfrac{b\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2} = 2\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b\sqrt{3}}{4} - \dfrac{c}{4}\right) = 0$ et la question 6 fournit $a = b = c = 0$ puis $f = 0$. Donc, φ est un produit scalaire sur F (B) est faux) ou encore $(, \varphi)$ est un espace euclidien et C) est vrai.

Question 12 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 12 : $\varphi(f_1, f_1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \neq 1$. Donc, B n'est pas une base orthonormée de F. D) est vraie et C) est faux. Quand t tend vers 0,

$$f_2(t) = \left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right)\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\right) = t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{t^2\sqrt{3}}{4} + o(t^2)$$

et

$$f_3(t) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + o(t^2).$$

Donc, $\varphi(f_1, f_2) = 1 \times 0 + 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$, $\varphi(f_1, f_3) = 1 \times 1 + 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Enfin, $\varphi(f_2, ; f_3) = 0 \times 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Donc B est orthogonale pour φ et B) est vrai et A) est faux

Question 13 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 13 : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

- f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f soit de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors $f^{(3)} = f$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ ou encore f est de classe C^{n+3} sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

Le résultat est démontré par récurrence. A) est vrai et B) est faux.

Si f est un polynôme, $\deg(f^{(3)}) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \deg(f) \leqslant 2 \\ \deg(f) - 3 \text{ si } \deg(f) \geqslant 3 \end{cases} \leqslant \deg(f) - 3$ (avec la convention usuelle $-\infty - 3 = -\infty$). Si $f \neq 0$, alors $\deg(f^{(3)}) < \deg(f)$ et en particulier, $f^{(3)} \neq f$. Donc, si f est une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R}$, alors f est nécessairement nulle. C) est vrai et D) est faux.

Question 14 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 14 : Ker(T) est l'ensemble des applications f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $D^3(f) = \mathrm{Id}(f)$ ou encore $f^{(3)} = f$. Puisque toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, Ker(T) est l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

f_1 est une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$ et n'est en particulier pas un polynôme d'après la question précédente. Donc, A) et B) sont faux.

D'après la question 10, $D_F^3 = \mathrm{Id}_F$ et donc tout élément de F est dans Ker(T) ou encore $F \subset \mathrm{Ker}(T)$. C) est vrai et D) est faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : Il n'est pas possible que pour toute solution f de (E) on ait $g = 0$. En effet, dans le cas contraire, toute solution de (E) serait solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ ou encore l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, qui contient le sous-espace F de dimension 3, serait contenu dans l''espace des solutions de $y'' + y' + y = 0$ qui est de dimension 2, ce qui est impossible.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f^{(3)} + f'' + f' = f + f'' + f' = g$. Par suite, si g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y$ et de plus, si $g \neq 0$ ce qui est possible, g n'est pas solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -y$. Donc A) et D) sont faux.

Puisque g est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = y$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda e^x$ ou encore il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f_1$. B) est vrai et C) est faux.

Question 16 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 : L'équation caractéristique de (S_k) est $z^2 + z + 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions non réelles conjuguées $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions complexes sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \exp\left(\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})t}{2}\right) + \mu \exp\left(\dfrac{(-1 - i\sqrt{3})t}{2}\right)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Donc A) est faux et B) est vrai.

L'ensemble des solutions complexes de (S_k) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension 2 (donc D) est faux. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_2(t) = \dfrac{1}{2i}\left(\exp\left(\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})t}{2}\right) - \exp\left(\dfrac{(-1 - i\sqrt{3})t}{2}\right)\right)$ et $f_3(t) = \dfrac{1}{2}\left(\exp\left(\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})t}{2}\right) + \exp\left(\dfrac{(-1 - i\sqrt{3})t}{2}\right)\right)$, f_2 et f_3 sont des solutions de (S_k) sur $\mathbb{R}$. D'après la question 6, (f_2, f_3) est une famille libre et puisque L'ensemble des solutions complexes de (S_k) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension 2, (f_2, f_3) est une base de l'espace des solutions de (S_k) sur $\mathbb{R}$. C) est vrai et D) est faux.

Question 17 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 17 : Si $\lambda \neq 0$, les fonctions $t \mapsto \lambda e^t$ et $t \mapsto \dfrac{\lambda}{2}e^t$ (obtenues pour $\alpha = \beta = 0$) ne sont pas solution de (S). Donc A) et B) sont faux Les solutions de (S) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda}{3}e^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$.

D'après la question 15, toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est encore une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ et donc est une combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) \subset F$. Comme d'après la question 14, on a aussi $F \subset \mathrm{Ker}(T)$, finalement $\mathrm{Ker}(T) = F$. C) est faux et D) est vrai.

Partie II

Question 18 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : $0 < b \leqslant a$ et donc $0 < b_0 \leqslant a$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n - b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{a_n})^2 - 2\sqrt{a_n b_n} + \left(\sqrt{b_n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geqslant 0.$$

Donc A) est vrai. Si on prend $b = 1$ et $a = 2$, alors $b_0 < a_0$ et donc B) est faux. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

(donc D) est faux) et

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}),$$

et donc C) est faux.

Question 19 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0$ ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc la suite (a_n) est décroissante et par suite, pas minorée par $a_0 = a$ sauf cas particulier $a = b$. A) et B) sont faux.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geqslant 0$. Donc la suite (b_n) est croissante et par suite, pas majorée par $b_0 = b$ sauf cas particulier $a = b$. C) et D) sont faux.

Question 20 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 20 : La suite (a_n) est décroissante et minorée par $b_0 = b$ et donc convergente. La suite (b_n) est croissante et majorée par $b_0 = b$ et donc convergente. Notons ℓ et ℓ' les limites respectives de ces deux suites. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\ell = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ puis $\ell = \ell'$. Ainsi, les suites (a_n) sont adjacentes et en particulier convergentes de même limite. B) est vrai et le reste est faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : Si $b < a$, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} < 0$ et donc B) et D) sont faux. Si $b < a$, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1}}\right) > \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right) = \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)^2.$$

Donc A) est faux. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$ et aussi

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1}}\right) \geqslant \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right) = \left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)^2.$$

.
Donc C) est vrai.

Question 22 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 : D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{1}{2}d_n^2$ et donc $d_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}d_n$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n d_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ (car la suite d est positive).

Si $b < a$, alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < 0$ et $d_n \geqslant 0$. Donc, D) est faux et de même, C) est faux pour $n = 1$.
Si $b < a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n < \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ et donc B) est faux.
Si $b = 1$ et $a = 9$, alors $a_1 = 5$ et $b_1 = \sqrt{10}$. Ensuite, $\dfrac{1}{2^1}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = 1$ et $\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1} = 5^{1/2} - 10^{1/4} = 0,4\ldots < \dfrac{1}{2^1}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$. Donc A) est faux.

Question 23 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 23 : D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right) = d_n\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a_n} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a} \text{ (car la suite } (a_n) \text{ est décroissante et } a_0 = a) \end{aligned}$$

et donc $a_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a} + b_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a} + \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ (car la suite (b_n) est croissante). Donc A) est vrai.

Puisque (b_n) tend en croissant vers $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et à fortiori $b_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a} + \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Donc B) est vrai.

De $a_n - b_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a}$, on tire aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n \leqslant a_n - b_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times 2\sqrt{a} \leqslant b_n$ et donc D) est vrai (erreur d'énoncé) et C) est faux.

Partie III

Question 24 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Donc

$$f \text{ continue sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow f \text{ continue en } 0 \Leftrightarrow \ell = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t) \Leftrightarrow \ell = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \Leftrightarrow \ell = 1.$$

B) est vrai et le reste est faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 25 : Dorénavant $\ell = 1$ et par suite f est continue en 0. B) est faux.

$$f(t) \underset{t\to 0,\ t\neq 0}{=} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \underset{t\to 0,\ t\neq 0}{=} \frac{t + o(t^2)}{t} = 1 + o(t) = f(0) + o(t).$$

(et donc D) est faux). Ainsi, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et donc f est dérivable en 0. Ainsi, A) est faux. Enfin, $f'(0)$ est le coefficient de t dans le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 et donc $f'(0) = 0$. C) est vrai.

Question 26 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 26 : D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux et finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$. A) est faux et B) est vrai. Pour $x \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{t} + \operatorname{Arctan} t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}.$$

Donc C) est faux et D) est vrai.

Question 27 :

A) FAUX
B) FAUX
C VRAI
d) FAUX

Explication 27 : Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw &= \int_0^t \frac{w}{2} \times \frac{2w}{(1+w^2)^2}\, dw = \left[\frac{w}{2}\left(-\frac{1}{1+w^2}\right)\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\operatorname{Arctan} t}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{Arctan} t\right).\end{aligned}$$

Donc A) et B) sont faux. Ensuite, pour $t \neq 0$,

$$\frac{t^2f'(t)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t\right) = -I(t),$$

et donc $I(t) = -\frac{t^2f'(t)}{2}$ (ce qui reste vrai pour $t = 0$). C) est vrai et D) est faux.

Question 28 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 28 : f est paire et pour $t > 0$, $f'(t) = -\frac{2}{t^2}\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw \leqslant 0$. Donc f est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis, par parité, croissante sur $]-\infty, 0]$. Tout est faux.

Question 29 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : Puisque f est paire, C_f admet (Oy) pour axe de symétrie. A) est faux et B) est vrai. Puisque $f'(0) = 0$ (d'après la question 25), C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. D) est vrai et C) est faux.

Question 30 :
A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 30 : f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$,

$$\phi(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0},$$

puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \Phi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = f(0) = 1 = \phi(0)$ et donc ϕ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$. A) est faux et B) est vrai.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Puisque f est paire, en posant $u = -t$ on obtient

$$\int_0^{-x} f(t)\,dt = \int_0^x f(-u)\,(-du) = -\int_0^x f(u)\,du,$$

Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est impaire puis, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire, on en déduit que ϕ est paire. C) est vrai et D) est faux.

Question 31 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 31 : Soit $x > 0$. Puisque f est décroissante sur $[0, x] \subset [0, +\infty[$ d'après la question 28,

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(0)\ dt = 1,$$

et d'autre part,

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\ dt = f(x).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$. Cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$ puisque $\phi(0) = f(0) = 1$ puis pour $x < 0$ par parité de f et ϕ. D) est vrai (f est effectivement croissantes sur $[x, 0]$ pour $x < 0$) et le reste est faux.

Question 32 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $/\mathrm{phi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis pour $x \neq 0$,

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\ dt + \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - \phi(x)}{x}.$$

Donc B) est vrai. Ensuite, quand x tend vers 0, en posant $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 26, F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet un développement limité d'ordre 2 en 0 puis

$$\begin{aligned}\phi(x) = \frac{F(x)}{x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x} = \frac{0 + f(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + o(x^2)}{x}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)\end{aligned}$$

Donc D) est vrai puis A) et C) sont faux.

Question 33 :
A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 33 : Soit $x \geqslant 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, $\mathrm{Arctan}\, t \leqslant \frac{\pi}{2}$ puis $J(x) \leqslant \int_1^x \frac{\pi}{2t} = \frac{\pi \ln x}{2}$. Donc B) est vrai et A) est faux.

Soit $x \geqslant 1$.

$$0 \leqslant \phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\ dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\ dt + \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

Comme $\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\ dt + \frac{\pi \ln x}{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de $\phi(x)$. C) est vrai et D) est faux.

Question 34 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 34 : ϕ est paire. Donc C_ϕ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. A) et B) sont faux et C) est vrai. $\phi'(0) = 0$ et donc C_ϕ admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. D) est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 35 : $\phi(1) = \phi(-1)$ et donc ϕ n'est pas injective. A) est faux (et d'ailleurs ne veut rien dire).

• On reprend les inégalités de la question 31. Pour $x > 0$, on a plus précisément $f(x) < \phi(x) < 1$ et donc pour $x > 0$, $\phi'(x) = \dfrac{f(x) - \phi(x)}{x} < 0$. Donc ϕ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, ϕ est continue sur $[0, +\infty[$. Par suite, ϕ induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x), \phi(0)] =]0, 1]$. Donc B) est faux.

• Pour $x > 0$, d'après la question 27

$$\begin{aligned}
|\phi'(x)| &= \frac{\phi(x) - f(x)}{x} \leqslant \frac{1 - f(x)}{x} = \frac{x - \text{Arctan}\, x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\, dt \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\frac{t}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t}{2}\, dt \text{ (car } (t-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Cette inégalité reste vraie pour $x < 0$ par parité puis pour $x = 0$ car $\phi'(0) = 0$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(x) = \phi(x) - x$. Pour tout réel x, $\psi'(x) = \phi'(x) - 1 \leqslant \dfrac{1}{4} - 1 < 0$. Donc ψ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\phi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, $\psi(x)$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$. ψ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un et un seul réel α tel que $\psi(\alpha) = 0$ ou encore tel que $\phi(\alpha) = \alpha$. On note que $\phi(0) = 1 \neq 0$ et donc $\alpha \neq 0$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|,$$

puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Donc C) est vrai.

• Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \neq 0$ et donc D) est faux.

Question 36 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 36 : On rappelle que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la question 32, pour tout réel x non nul,

$$x^2\phi'(x) + x\phi(x) = x^2\frac{f(x) - \phi(x)}{x} + x\phi(x) = xf(x) = \text{Arctan}(x).$$

D'autre part, l'égalité $x^2\phi'(x) + x\phi(x) = \text{Arctan}(x)$ est encore vraie quand $x = 0$. Donc ϕ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. A) est faux.

Sur I $=]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$, (E) s'écrit $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\text{Arctan}\, x}{x^2}$. Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\, x}{x^2}$ sont continues sur l'intervalle I, les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + Kf_1$, $K \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution particulière de (E) sur

I et f_1 est une solution non nulle de l'équation $y' + \frac{1}{x}y = 0$ sur I. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène sur I, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \phi(x) + \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$. B) est faux.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel non nul x, $f(x) = \left\{\begin{array}{l} \phi(x) + \frac{K_1}{x} \text{ si } x > 0 \\ \phi(x) + \frac{K_2}{x} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. Comme f doit avoir une limite réelle quand x tend vers 0, on a nécessairement $K_1 = K_2 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \phi(x)$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \phi(x)$ par continuité de f et de ϕ en 0. Ainsi, une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement égale à ϕ. Réciproquement, ϕ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et donc D) est vrai et C) est faux.

