ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2009

# CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTES DE LIGNE

# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

**Durée : 2 Heures**
**Coefficient : 1**

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 15 pages de texte, numérotées de 1 à 15.

**CALCULATRICE AUTORISEE**

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

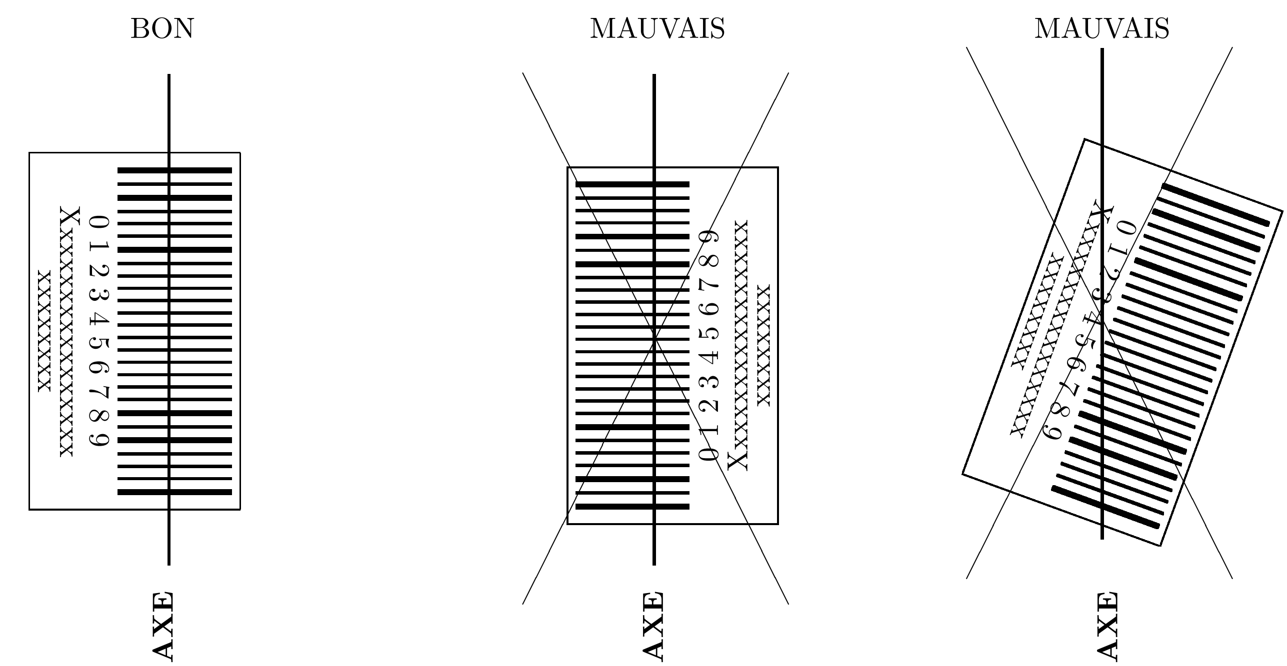
## ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

## POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :




2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.
**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro. Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question ,
*la ligne correspondante doit rester vierge.*

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse
*vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.*

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
*vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.*

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
*vous devez alors noircir la case e.*

**En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera applique.**

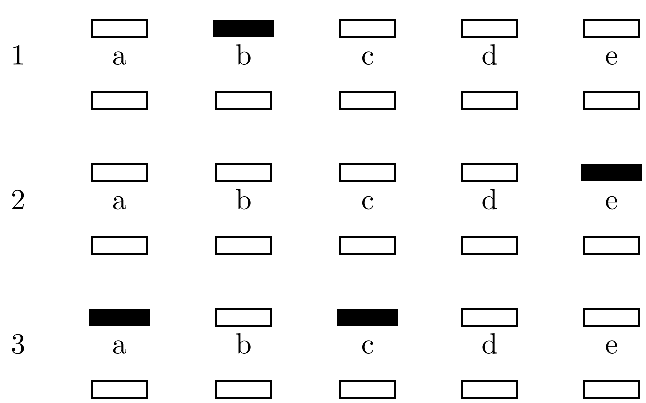
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**



**Concours EPL**
**Epreuve de mathématiques**

**Exercice 1 :**
On note $\mathfrak{R}$ l'ensemble des réels $a \in \mathfrak{R}$.
Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathfrak{R}$.
On considère alors l'application $\varphi_a$ définie par :
$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathfrak{R},\ x \neq a,\ \varphi_a(f)(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt.$

**Question 1 :**
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) Si $\circ$ note la composition de deux applications, $(E, \circ)$ est un groupe.
b) Si $+$ note la somme de deux applications, $(E, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $Id_E\ :\ x \mapsto x$.
c) Si . note la multiplication d'une application par un scalaire, $(E, +, .)$ est un $\mathfrak{R}$ espace vectoriel de dimension infinie.
d) Si $\times$ note la multiplication de deux applications, $(E, +, \times)$ est un corps.

**Question 2 :**
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $f$ admet une primitive, car pour toute fonction $g$ définie sur $\mathfrak{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\, dt$ en est une primitive.
b) $\varphi_a$ est prolongeable par continuité en $a$.
c) Pour tout $f$ de $E$, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en $a$ en posant $\varphi_a(f)(a) = f(a)$.
d) Pour tout $f$ de $E$, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en $a$ en posant $\varphi_a(f)(a) = f'(a)$.

**Nota Bene :** Dans toute la suite, si l'on a prolongé une fonction $\psi$ par continuité en $a$, on continuera à appeler $\psi$ cette prolongée.

**Question 3 :**
On peut affirmer dès lors que :

a) $\varphi_a$ définit un endomorphisme de $E$, puisque $\forall (f,g) \in E^2,\ \varphi_a(fg) = \varphi_a(f)\varphi_a(g)$.
b) $\forall (f,g) \in E^2,\ \varphi_a(f+g) = \varphi_a(f) + \varphi_a(g)$ et donc $\varphi_a$ est linaire.
c) $\varphi_a(E) = E$ puisque $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathfrak{R}$.
d) $E \subset \varphi_a(E)$ puisque $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathfrak{R}$.

**Question 4 :**
Si on étudie la dérivabilité de $\varphi_a(f)$ sur $\mathfrak{R}$, on peut affirmer que :

a) Si $x \neq a$, $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en $x$ et sa dérivée vaut $\dfrac{f(x) - \varphi_a(f)(x)}{x-a}$.
b) Si $x \neq a$, $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en $x$ et sa dérivée vaut $\dfrac{f(x) - f(a) - \varphi_a(f)(x)}{x-a}$.
c) Si $g$ est la fonction définie par $\forall x \in \mathfrak{R},\ g(x) = |x-a|$ alors $\varphi_a(g) = \dfrac{g}{2}$.
d) $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en $a$.

**Question 5 :**
Si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$, la formule de Taylor Young va nous permettre d'écrire que

a) $f(x) = f(a) - f'(a)(a-x) + o(x-a)$.
b) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)^2)$.
c) Si $x \neq a$, $\dfrac{1}{x-a}\left[\varphi_a(f)(x) - f(a)\right] = \dfrac{f'(a)}{2} + o(1)$.
d) Si $x \neq a$, $\dfrac{1}{x-a}\left[\varphi_a(f)(x) - f(a)\right] = \dfrac{f'(a)}{2} + o(x-a)$.

**Question 6 :**
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) Un théorème du cours permet d'affirmer que si $h$ est une fonction définie sur $\mathfrak{R}$, dérivable en tout point de $\mathfrak{R}$ sauf peut-être en un point réel $a$, et si de plus $\lim\limits_{x \to a} h'(x)$ existe et est fini alors $h$ est dérivable en $a$.
b) Si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$, alors comme $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathfrak{R}$, dérivable en tout point différent de $a$, et que $\lim\limits_{x \to a} \left[\varphi_a(f)\right]'(x) = \dfrac{f'(a)}{2}$, $\varphi_a(f)$ est dérivable sur $\mathfrak{R}$.
c) Même si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$, on ne peut pas être certain que $\varphi_a(f)$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$.
d) Si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$, il est certain que $\varphi_a(f)$ est de classe $C^1$ sur $\mathfrak{R}$.

**Question 7 :**
On cherche à savoir si $\varphi_a$ est injective ou surjective. On peut dire que :

a) $\mathrm{Ker}\varphi_a = \left\{ f \in E,\ \forall x \in \Re,\ \int_a^x f(t)\,dt = 0 \right\}$.
b) $\mathrm{Ker}\varphi_a = \{ f \in E,\ \forall x \in \Re,\ f(x) = f(a) \}$.
c) $\varphi_a$ est injective car $\mathrm{Ker}\varphi_a = \{0_E\}$.
d) $\varphi_a$ est surjective parce que pour un endomorphisme d'espace vectoriel, l'injectivité est équivalente à la surjectivité.

**Question 8 :**
Soit $b$ un réel. On considère $g_b\ :\ \left\{ \begin{array}{c} \Re \to \Re \\ x \mapsto |x-b| \end{array} \right.$. On veut résoudre l'équation d'inconnue $f$ :

$$\varphi_a(f) = g_b.$$

a) S'il existe une solution alors elle est unique. De plus, si $a = b$ alors d'après la question 4, $f = 2g_a$.
b) S'il existe une solution $f$ alors elle n'est pas unique puisque toutes les fonctions de la forme $f + f_0$ où $f_0 \in \mathrm{Ker}\varphi_a$ sont encore solutions.
c) Si $a \neq b$, il existe une solution puisque $\varphi_a$ est surjective.
d) Si $a \neq b$, il ne peut exister de solution puisque $g_b$ n'est pas dérivable en $b$.

**Question 9 :**
Soit $n$ un entier naturel. On appelle $F = \Re_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $n$. On munit $F$ de sa base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
On appelle $\psi_a$ la restriction de $\varphi_a$ à $F$, c'est-à-dire l'application telle que

$$\forall P \in F,\ \psi_a(P) = \varphi_a(P).$$

a) $\psi_a$ est un endomorphisme de $F$ car $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\psi_a(X^i) = \dfrac{1}{i+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{i} a^k X^{i+1-k}$.
b) $\mathrm{Ker}\psi_a \subset \{0_F\}$ et $\psi_a$ est injectif.
c) $\psi_a$ est surjectif puisque $\psi_a$ est injectif et $\dim F = n$.
d) $\psi_a$ ne peut pas être surjectif puisque $\varphi_a$ ne l'est pas.

**Question 10 :**
On considère la famille $B' = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$. On notera $A$ (respectivement $A'$) la matrice de $\psi_a$ relativement à la base $B$ (respectivement $B'$). $P$ notera la matrice de passage de $B$ à $B'$.
Pour une matrice quelconque $M$ de taille $n \times p$, on notera $M(i,j)$ l'élément de $M$ situé à la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne. On pourra noter $M = (M(i,j))_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.
$\binom{k}{i}$ note le coefficient binomial $\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ si $k \geqslant i \geqslant 0$ et 0 sinon.

a) $B'$ est une base de $F$ car si $a$ est nul on retrouve la base initiale.
b) $\forall (i,k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $P(i,k) = \binom{k}{i}(-a)^{k-i}$.
c) $\forall (i,k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $P(i,k) = \binom{k}{i}a^{k-i}$.
d) $\left(\binom{k}{i}(-a)^{k-i}\right)_{(i,k) \in [\![1,n+1]\!]^2} \cdot \left(\binom{k}{i}a^{k-i}\right)_{(i,k) \in [\![1,n+1]\!]^2} = I_{n+1}$.

**Question 11 :**
On peut dès lors affirmer que :

a) $P$ est inversible car les matrices de passage sont toujours inversibles et $A = P^{-1}A'P$.
b) $P$ est inversible car les matrices de passage sont toujours inversibles et $A = PA'P^{-1}$.
c) $A'$ est la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $A'(i,i) = \dfrac{1}{i}$.
d) $A'$ est la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $A'(i,i) = i+1$.

**Question 12 :**
Grâce aux résultats de la question 11 on peut affirmer que :

a) $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\operatorname{rang}[(i+1)A - I_n] = 1$.
b) $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker}[(i+1)A - I_n]) = 1$.
c) Pour tout entier naturel $i$, il existe une unique solution à l'équation d'inconnue $Q$, $\psi_a(Q) = \dfrac{Q}{1+i}$.
d) Pour tout entier naturel $i$, il existe une infinité de solutions à l'équation d'inconnue $Q$, $\psi_a(Q) = \dfrac{Q}{1+i}$.

**Fin de l'exercice 1**

**Exercice 2 :**

On se place dans le plan euclidien $P$. On choisit deux points distincts $F$ et $F'$. On notere $a = \dfrac{FF'}{2}$.
Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble $L_a$ des points $M$ du plan vérifiant

$$MF \times MF' = a^2.$$

**Question 13 :**
Soit un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan $P$ tel que $O$ soit le milieu de $FF'$ et $\overrightarrow{i}$ soit porté par $(FF')$

a) $L_a = \left\{(x,y) \in \Re \times \Re,\ \left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\right\}$.
b) $L_a = \left\{(x,y) \in \Re \times \Re,\ \left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2(y^2-x^2)\right\}$.
c) $L_a = \left\{(x,y) \in \Re \times \Re,\ y = \sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}\right\}$.
d) $L_a = \left\{(x,y) \in \Re \times \Re,\ y = \sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)} \text{ ou } y = -\sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}\right\}$.

**Question 14 :**
L'ensemble $L_a$ admet pour équation en coordonnées polaires : $\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$
(on ne demande pas de vérifier ce résultat qui doit être admis).
On a donc en notant $\rho(\theta)$ l'unique solution (si elle existe) d'inconnue $\rho$ de l'équation polaire :

a) $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ donc $L_a$ est symétrique par rapport l'origine du repère.
b) $\rho(\theta) = \rho(\pi-\theta)$ donc $L_a$ est symétrique par rapport l'axe des ordonnées.
c) $\rho(\theta) = \rho(\theta+\pi)$ donc $L_a$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
d) On peut se contenter de mener l'étude de la courbe pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ puis utiliser trois symétries minimum pour construire le reste de $L_a$.

**Question 15 :**
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\theta \mapsto \cos(2\theta)$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, de dérivée négative, donc $\rho(\theta)$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, de dérivée négative.

b) $\rho(\theta)$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme composée de deux fonctions décroissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

c) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = +\infty$ donc $L_a$ admet une tangente horizontale au point $(0, a)$.

d) $L_a$ admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente et se situe au-dessus de cette tangente.

**Question 16 :**
Si on considère l'ensemble $L_a \cap \{(x, y) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R},\ x \geqslant 0\}$, on voudrait connaître l'aire intérieure notée $A$, à la courbe. On peut écrire que :

a) $A = \iint_{\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],\ \rho \in \left[0, a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right]} d\rho d\theta.$

b) $A = \iint_{\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \rho \in \left[0, a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right]} 2\rho d\rho d\theta.$

c) $A = a^2.$

d) $A = \frac{a^2}{2}.$

**Question 17 :**
Soit $\Omega$ un point du plan, soit $k$ un réel non nul. Si $\overline{AB}$ note la mesure algébrique du segment $[AB]$, on définit $I_k^\Omega$ par la donnée de $M' = I_k^\Omega(M)$ vérifiant :

(P1) $\Omega$, $M$ et $M'$ sont alignés

(P2) $\overline{\Omega M} \times \overline{\Omega M'} = k$.

On peut alors affirmer :

a) $I_k^\Omega$ est une application bien définie de $P$ dans lui-même puisque pour chaque point $M$ de $P$, il existe un et un seul point $M'$ vérifiant (P1) et (P2).

b) $I_k^\Omega$ est une application bien définie de $P \setminus \{\Omega\}$ puisque pour chaque point $M$ de $P$, diffrent de $\Omega$, il existe un et un seul point $M'$ vérifiant (P1) et (P2).

c) Si $k \neq 0$, $I_k^\Omega$ est une bijection de bijection réciproque $I_{\frac{1}{k}}^\Omega$.

d) Si $k \neq 0$, $I_k^\Omega$ est une bijection de bijection réciproque $I_k^\Omega$.

**Question 18 :**
On se ramène au plan complexe. Soit deux points $N$ et $N'$ de $P$ tels que $\Omega$, $N$ et $N'$ soient alignés et distincts. On note $\omega$, $z$ et $z'$ les affixes respectifs de $\Omega$, $N$ et $N'$.
On peut alors démontrer que :

a) $\overline{\Omega N} \times \overline{\Omega N'} = (z - \omega)(\overline{z' - \omega}) = (\overline{z - \omega})(z' - \omega)$.

b) Si $N' = I_k^\Omega(N)$ alors $z' = \omega + \dfrac{k}{\overline{\overline{z - \omega}}}$.

c) Les points fixes de $I_k^\Omega$ forment de cercle de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{|k|}$.

d) Il existe $k \in \mathfrak{R}$ tel que $I_k^\Omega$ ne possède qu'un point fixe unique.

**Question 19 :**
Dans cette question et la suivante, on va chercher à déterminer la composée $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ où $\alpha \in \Re^*$.
Avec les notations de la question précédente, on supposera que $N' = \left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(N)$.
On peut démontrer que :

a) Si $\Omega = O$, $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_{\frac{\alpha^2}{k}}^O$.

b) Si $N$ est distinct de $O$, $I_\alpha^O(N) = \Omega \Leftrightarrow z = \dfrac{\alpha}{\omega}$.

c) Si $\Omega \neq O$ et si $z \notin \left\{0, \dfrac{\alpha}{\overline{\omega}}\right\}$, on a $z' = \dfrac{(\alpha - \omega\overline{z})}{\alpha\overline{\omega} + \overline{z}\left(k - |\omega|^2\right)}$.

d) Si $\Omega \neq O$ et si $z \notin \left\{0, \dfrac{\alpha}{\omega}\right\}$, on a $z' = \dfrac{\alpha\,(\alpha - \omega\overline{z})}{\alpha\overline{\omega} + \overline{z}\left(k - |\omega|^2\right)}$.

**Question 20 :**
On supposera dans cette question que $\Omega \neq O$ et $k = |\omega|^2$.
On notera de plus $\omega = a + ib$.
Il est possible de montrer que :

a) $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une application affine et son application linéaire associée est donnée par la matrice $A = \dfrac{1}{|\omega|^2}\begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ et $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(O)$ est le point d'affixe $\alpha\omega$.

b) $A$ est une matrice orthogonale de déterminant négatif, c'est donc une rotation vectorielle et $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une rotation.

c) $A$ est une matrice orthogonale de déterminant négatif, c'est donc une symétrie orthogonale vectorielle et $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

d) $A$ possède des points fixes et est orthogonale. $A$ ne peut donc qu'être une symétrie orthogonale vectorielle et $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

**Question 21 :**
On supposera dans cette question que $\Omega \neq O$ et $k \neq |\omega|^2$.
Il est possible de montrer que :

a) $z' = \dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k} + \dfrac{k\alpha^2}{\left(|\omega|^2 - k\right)^2} \dfrac{1}{\overline{z} - \dfrac{\alpha\overline{\omega}}{|\omega|^2 - k}}$.

b) $z' = \dfrac{\omega}{|\omega|^2 - k} + \dfrac{k\alpha}{\left(|\omega|^2 - k\right)^2} \dfrac{1}{\overline{z} - \dfrac{\alpha\overline{\omega}}{|\omega|^2 - k}}$.

c) $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_\beta^S$ où $S$ est le point d'affixe $\dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k}$ et $\beta = \dfrac{k\alpha^2}{\left(|\omega|^2 - k\right)^2}$.

d) $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_\beta^S$ où $S$ est le point d'affixe $\dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k}$ et $\beta = \dfrac{k\alpha}{\left(|\omega|^2 - k\right)^2}$.

**Question 22 :**
On considère la conique $C_a$ définie par $x^2 - y^2 = 2a^2$.
On peut alors affirmer

a) La nature de $C_a$ dépend de la valeur de $a$. Plus précisément, c'est une ellipse si $a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, une hyperbole si $a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Une équation polaire de $C_a$ est $\rho^2 \cos(2\theta) = 2a^2$, $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

c) Si $M$ note un point de $C_a$ tel que $M \neq O$ et $M'$ un point quelconque de la conique $C_a$ tel que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM'}\right)$ $[\pi]$, alors $\overline{OM} \times \overline{OM'} = 2a^2$.

d) $I_1^O\left(C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

**Fin de l'exercice 2**

**Exercice 3 :**

Dans cet exercice, $p$ désigne un réel strictement positif et $f$ est l'application définie par

$$\forall t > 0,\ f(t) = t^p + pt.$$

**Question 23 :**
$f$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f(0) = 0$. On continuera à appeler $f$ l'application de $\mathfrak{R}^+$ ainsi définie.
On peut affirmer que :

a) $f$ est dérivable sur $\mathfrak{R}^+$ de dérivée $\forall t \in \mathfrak{R}^+,\ f'(t) = pt^{p-1} + p > 0$.

b) $f$ est strictement croissante sur $\mathfrak{R}^+$ comme somme d'une fonction croissante sur $\mathfrak{R}^+$ et d'une fonction strictement croissante sur $\mathfrak{R}^+$.

c) Si $f$ est une fonction strictement croissante définie sur $\mathfrak{R}^+$, alors $f$ est une bijection de $\mathfrak{R}^+$ sur $f\left(\mathfrak{R}^+\right)$.

d) Pour pouvoir affirmer qu'une fonction strictement croissante est une bijection de $\mathfrak{R}^+$ sur $f\left(\mathfrak{R}^+\right)$, il est nécessaire que $f$ soit continue.

**Question 24 :**
En fait, on peut démontrer que $f$ est une bijection de $\mathfrak{R}^+$ sur $\mathfrak{R}^+$. Nous noterons $g$ sa bijection réciproque.
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes :

a) $g$ est continue, croissante et dérivable sur $\mathfrak{R}^+$ en tant que réciproque d'une fonction $f$ continue, croissante et dérivable sur $g\left(\mathfrak{R}^+\right) = \mathfrak{R}^+$.

b) $g$ n'est dérivable en $x$ réel que si $f$ est dérivable en $g(x)$ et que $f'(g(x)) \neq 0$.

c) $g$ est dérivable en 0 et $g'(0)$ vaut $\dfrac{1}{p}$ si $p \geqslant 1$ et 0 si $0 < p < 1$.

d) Si $0 < p < 1$, $g$ n'est pas dérivable en 0 car $f$ n'est pas dérivable en $g(0)$.

**Question 25 :**
Dans la suite de cet exercice, $a$ désigne un réel strictement positif fixé et on note alors
$$\forall t \in \mathfrak{R}^+,\ \varphi(t) = \frac{(p-1)t^p + a}{p(t^{p-1}+1)}.$$
Si $\varphi$ admet un éventuel prolongement par continuité en 0 alors on appellera encore $\varphi$ ce prolongement.
On peut dès lors affirmer que :

a) $\forall p > 0,\ \varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{p-1}{p} t$ et $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0 par $\varphi(0) = 0$.

b) Pour $p > 1$, $\varphi$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

c) $\forall t \in \mathfrak{R}^+,\ \varphi(t) - t = \frac{f(t) - a}{f'(t)}$.

d) Si $0 < p < 1$, les seules solutions positives à l'équation $\varphi(t) = t$ sont 0 et $g(a)$.

**Question 26 :**
Dans la suite de cet exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
Dans cette question, on suppose que $0 < p < 1$.
On peut alors montrer que :

a) $\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}} > g(a)$ et $\varphi\left(\left[0, \sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]\right) \subset [0, g(a)]$.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et ceci quelque soit le choix de $u_0 > 0$.

c) Si $u_0 \in \left[0, \sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

d) Si $u_0 \in \left[0, \sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}$.

**Question 27 :**
Dans cette question, on suppose que $p > 1$ et $u_0 = \dfrac{a}{p}$.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $g(a) < \dfrac{a}{p}$ et pour tout $t \in \left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{p-1}{p}$.

b) Le théorème des accroissements finis dit que si $\varphi$ est continue sur $\left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$ et dérivable sur $\left]g(a), \dfrac{a}{p}\right[$, il existe $\theta \in \left]g(a), \dfrac{a}{p}\right[$ tel que $\forall (t,t') \in \left]g(a), \dfrac{a}{p}\right[^2$, $t \neq t'$, $\dfrac{|\varphi(t)-\varphi(t')|}{|t-t'|} = \varphi'(\theta)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - g(a)| \leqslant \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{n+2} |u_n - g(a)|$.

d) L'inégalité $\left|\dfrac{p-1}{p}\right| \leqslant 1$ est suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(a)$.

**Fin de l'exercice 3**

**Exercice 4 :**

On notera dans cet exercice $E$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues de $[-1,1]$ sur $\mathfrak{R}$.

**Question 28 :**
$P$ (respectivement $I$) notera, dans la suite de l'exercice, l'ensemble des fonctions définies, continues et paires (respectivement impaires) de $[-1,1]$ sur $\mathfrak{R}$. On peut affirmer que :

a) $P$ n'est pas un sous espace vectoriel de $E$ car si $\lambda < 0$ et $f \in P$, $\lambda f \in I$.

b) Il n'existe pas de fonction à la fois paire et impaire sur $[-1,1]$.

c) $E = P \oplus I$ car $P \cap I = \varnothing$ et $\dim E = \dim P + \dim I$.

d) $E = P \oplus I$ car $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} - \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ et que cette écriture de $f$ comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est unique.

**Question 29 :**

On définit l'application $\varphi$ par : $\forall (f,g) \in E \times E$, $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) $\varphi$ est bien définie car elle s'applique à des fonctions continues sur $]-1,1[$.

b) Si $f$ est continue par morceaux sur $[-1,1]$ et positive, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0 \Rightarrow f = 0$.

c) $\varphi$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est donc un produit scalaire et $(E,\varphi)$ est un espace vectoriel euclidien.

d) $\varphi$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est donc un produit scalaire mais $(E,\varphi)$ n'est pas un espace vectoriel euclidien.

**Question 30 :**

On choisit dans cette question $(f,g) \in P \times I$. Si on note, pour $A$ un sous espace vectoriel quelconque de $E$, $A^{\perp}$ l'orthogonal de $A$, on peut alors écrire que :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)g(t)dt = -\int_{0}^{1} f(t)g(t)dt$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)g(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt$.

c) A ce stade du raisonnement : $P \subset I^{\perp}$ ou $I \subset P^{\perp}$.

d) A ce stade du raisonnement : $P^{\perp} \subset I$ et $I^{\perp} \subset P$.

**Question 31 :**

Si $f \in P^{\perp}$, on peut donc écrire que :

a) Comme $f \in E$, il existe $(f_p, f_i) \in P \times I$ tel que $f = f_p + f_i$ et $\forall g \in P$, $\varphi(f_i, g) = 0$.

b) Comme $f \in E$, il existe $(f_p, f_i) \in P \times I$ tel que $f = f_p + f_i$ et $\forall g \in I$, $\varphi(f_p, g) = 0$.

c) En choisissant judicieusement $g$, $P^{\perp} \subset I$ et $P^{\perp} = I$.

d) Le cosinus hyperbolique est la projection orthogonale sur $P$ de la fonction exponentielle.

**Fin de l'exercice 4**

**Exercice 5 :**

Soit $(a, b, c) \in \Re^3$, $c \neq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ et on considère l'équation aux dérivées partielles suivante, d'inconnue $f$ de classe au moins $C^2(\Re^2)$ :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (E)$$

**Question 32 :**
On effectue le changement de variable suivant : $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ où $(\alpha, \beta) \in \Re^2$. On posera dans la suite de cet exercice $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, $P = a + bX + cX^2$ et $K = 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta$.
On peut alors affirmer que :

a) L'application $H : \begin{array}{ccc} \Re^2 & \rightarrow & \Re^2 \\ (x, y) & \mapsto & (u, v) \end{array}$ est bijective si et seulement si $\alpha \neq \beta$ et que sous cette condition $H$ et $H^{-1}$ sont de classe $C^\infty(\Re^2)$.

b) $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$.

d) $g$ vérifie l'équation $P(\alpha)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + K\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + P(\beta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \quad (E')$.

**Question 33 :**
On se place, dans cette question et la suivante seulement, dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$. On peut alors affirmer que :

a) $P$ possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$ vérifiant $r_1 + r_2 = -\dfrac{a}{c}$ et $r_1.r_2 = \dfrac{b}{c}$.

b) $P$ possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$. On peut donc choisir deux réels $\alpha$ et $\beta$, différents et tels que $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ et $K \neq 0$.

c) $K = P'(\alpha) + P'(\beta)$ et pour que $K$ soit nul il faudrait que $\alpha$ et $\beta$ soient racines doubles de $P$, ce qui est impossible. Donc $K \neq 0$ pour tout $\alpha \neq \beta$.

d) $g$ vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

**Question 34 :**
On est toujours dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$. On peut dire que :

a) On a $\dfrac{\partial g}{\partial u} = M$ où $M$ est une constante réelle.

b) On a $\dfrac{\partial g}{\partial u} = M(u) + N$ où $M$ est une fonction de classe au moins $C^1(\mathfrak{R})$ et $N$ est une constante réelle.

c) Les fonctions solutions de $(E)$ sont toutes de la forme $f(x,y) = h_1(x + r_1 y) + h_2(x + r_2 y)$ où $h_1$ et $h_2$ sont des fonctions arbitraires de classe au moins $C^2(\mathfrak{R})$ et $r_1$ et $r_2$ sont les deux racines du polynôme $P$.

d) Les fonctions solutions de $(E)$ sont toutes de la forme $f(x,y) = h_1(x + r_1 y).h_2(x + r_2 y)$ où $h_1$ et $h_2$ sont des fonctions arbitraires de classe au moins $C^2(\mathfrak{R})$ et $r_1$ et $r_2$ sont les deux racines du polynôme $P$.

**Question 35 :**
On se place, dans cette question et la suivante, dans le cas $b^2 - 4ac = 0$. On peut alors affirmer que :

a) $P$ ne possède plus qu'une racine double $r$, mais le raisonnement précédent reste correct et on a : les fonctions solutions de $(E)$ sont toutes de la forme $f(x,y) = h(x + ry)$ où $h$ est une fonction arbitraire de classe au moins $C^2(\mathfrak{R}^2)$.

b) $P$ ne possède plus qu'une racine double $r$, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on obtient $K = 0$.

c) $P$ ne possède plus qu'une racine double $r$, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on obtient $K \neq 0$.

d) $P$ ne possède plus qu'une racine double $r$, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on ne sait pas si $K$ est nul ou pas (ça dépend de la valeur de $r$).

**Question 36 :**
On est toujours dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$ et on peut affirmer que :

a) $(E')$ est équivalente à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

b) $(E')$ est équivalente à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$.

c) $f(x,y) = x\cos(x + ry) + \sin(x + ry)$ où $r$ est l'unique racine du polynôme $P$ est solution de $(E)$.

d) Les solutions de $(E)$ sont toutes de la forme $f(x,y) = x.h(x + ry)$ où $r$ est l'unique racine du polynôme $P$ et où $h$ est une fonction au moins $C^2(\mathfrak{R})$.