CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2007

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE I

Question 1 :
A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 :
A) $j^2 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$.
B) $j^3 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1$.
C) $j^3 - 1 = (j-1)(j^2+j+1)$. Donc $j^3 = 1 \Rightarrow (j-1)(j^2+j+1) = 0 \Rightarrow j^2+j+1 = 0$ car $j \neq 1$.
D) $j^2 + j = -1 \neq 1$.

Question 2 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 2 :
A) Puisque $j^3 = 1$, $j^4 = j$ puis $a + bj^2 + cj = x(1+j^2+j) + y(1+j^3+j^3) + z(1+j^4+j^2) = 3y + (x+z)(1+j+j^2)$.
B) $a+b+c = x(1+1+1) + y(1+j+j^2) + z(1+j^2+j) = 3x + (y+z)(1+j+j^2)$.
C) $a + bj + cj^2 = x(1+j+j^2) + y(1+j^2+j^4) + z(1+j^3+j^3) = 3z + (x+y)(1+j+j^2)$.
D) $a + bj^2 + cj = 3y + (x+z)(1+j+j^2)$.

Question 3 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 3 :
A) et B) Le déterminant du système vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & (j^2)^2 \end{vmatrix} = \mathrm{Van}(1, j, j^2) \neq 0 \text{ car } 1,\ j \text{ et } j^2 \text{ sont deux à deux distincts.}$$

Le système est donc de Cramer et admet un et un seul triplet solution.
C) et D) D'après Q2 B), $x = \frac{a+b+c}{3}$, d'après Q2 D) $y = \frac{a+bj^2+cj}{3}$ et d'après Q2 C), $z = \frac{a+bj+cj^2}{3}$.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 4 :
A) et C) $a = 1$, $b = j$, $c = j^2$ (a, b et c ne sont pas tous réels) fournit $x = 0$, $y = 1$ et $z = 0$ (x, y et z sont réels). Donc A) est faux.
B) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x + y + z \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$. Donc B) est faux.
D) $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-j = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $j^2 \neq \overline{-j}$.

PARTIE II

Question 5 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 5 :
Puisque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha + in \neq 0$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n + iv_n &= \int_0^{\pi} e^{(\alpha+in)x}\,dx = \frac{1}{\alpha+in}\left[e^{(\alpha+in)x}\right]_0^{\pi} = \frac{\alpha - in}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}(\cos(nx) + i\sin(nx))\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}(\alpha\cos(nx) + n\sin(nx) + i(-n\cos(nx) + \alpha\sin(nx)))\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

et en prenant la partie réelle,

$$u_n = \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}(\alpha\cos(nx) + n\sin(nx))\right]_0^{\pi}.$$

Par une double intégration par parties on a aussi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{n}{\alpha}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{n}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{\alpha^2}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\left(\cos(nx) + \frac{n}{\alpha}\sin(nx)\right)\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{\alpha^2}u_n. \end{aligned}$$

Question 6 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 6 :
D'après Q5, $v_n = \mathrm{Im}(u_n + iv_n) = \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}(-n\cos(nx) + \alpha\sin(nx))\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}((-1)^{n+1}ne^{\alpha\pi} + n)$.

Par une double intégration par parties on a aussi

$$v_n = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{n}{\alpha}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{n}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{\alpha^2}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin(nx)\, dx$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}(\sin(nx) - \frac{n}{\alpha}\cos(nx))\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{\alpha^2}v_n.$$

Question 7 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 :
A) $|u_0| = \dfrac{|e^{\alpha\pi} - 1|}{|\alpha|} = \dfrac{|\alpha|}{0^2 + \alpha^2}|e^{\alpha\pi} - 1| > \dfrac{|\alpha|}{0^2 + \alpha^2}$ pour $\alpha = 1$ par exemple.
B) D'après Q5), $u_n = \dfrac{\alpha((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1)}{n^2 + \alpha^2}$ et donc pour n impair $|u_n| = |\alpha|(e^{\alpha\pi} + 1)/(n^2 + \alpha^2)$. Enfin, si $n^2 > \alpha^2$, $1/|n^2 - \alpha^2| > 1/(n^2 + \alpha^2)$...
C) Si $\alpha > 0$ en $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n(1 - e^{\alpha\pi})}{n^2 + a^2} < 0$.
D) Faux pour $n = 0$.

Question 8 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 :
D'après Q6, $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n e^{\alpha\pi} + n}{\alpha^2 + n^2}$ et donc $v_{2k} = \dfrac{2k}{\alpha^2 + 4k^2}(1 - e^{\alpha\pi})$. Donc $v_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1 - e^{\alpha\pi}}{2k}$.

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 9 :
A) La suite $(\dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas de signe constant et converge.
B) La suite $(-n)$ est majorée et diverge.
C) et D) $|u_n| = |\alpha|(e^{\alpha\pi} + 1)/(n^2 + \alpha^2) \to 0$.

PARTIE III

Question 10 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 10 :
A) et B) Pour $x = 0$, $\varphi_1(u) = \dfrac{1}{\sin^2 u}$ et φ_1 n'est pas définie en 0.
C) Pour $x \neq 0$, $x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2 = 0 \Rightarrow x^2(\cos u)^2 = (\sin u)^2 = 0 \Rightarrow \cos u = \sin u = 0$ ce qui est impossible.
D) Pour $x < 0$ aussi.

Question 11 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 11 :
A) et B) Voir Q10.
C) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $u \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}\varphi_2'(u) &= \frac{\cos u(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2) - \sin u(-2x^2 \cos u \sin u + 2 \sin u \cos u)}{(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2} \\ &= \frac{x^2(\cos u)^3 + (2x^2 - 1)\cos u(\sin u)^2}{(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2} = \frac{x^2(\cos u)^3 + 2(x^2 - \frac{1}{2})\cos u(\sin u)^2}{(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2}.\end{aligned}$$

D) Il ne devrait pas y avoir de problème si $x = 1$, et il y en a.

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 12 :
A) Pour $x = 0$, φ_1 n'est pas continue en 0.
B) La restriction à $[0, 1]$ de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est définie sur le segment $[0, 1]$ mais n'est pas intégrable sur ce segment.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 13 :
$\forall X \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{Arctan} X$.

Question 14 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 14 :
A) La borne $\frac{\pi}{2}$ est fausse.
B) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$.
C) et D) On pose $v = \cos u$ et donc $dv = -\sin u\,du$. Si u varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, v varie de 1 à 0 en décroissant et

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2\cos^2 u + 1 - \cos^2 u}\,du = \int_1^0 \frac{-dv}{x^2v^2 + 1 - v^2}\,dv = \int_0^1 \frac{dv}{x^2v^2+1-v^2}\,dv \\
&= \int_0^1 \frac{dv}{1-(1-x^2)v^2}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}v} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}v}\right)\,dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left[-\ln|1-\sqrt{1-x^2}v| + \ln|1+\sqrt{1-x^2}v|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right).
\end{aligned}$$

Question 15 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 15 :
Quand x tend vers 0, $1-\sqrt{1-x^2} = 1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et donc $1-\sqrt{1-x^2} \sim \frac{x^2}{2}$ puis $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{2}{x^2/2} = \dfrac{4}{x^2}$ et donc (puisque $\frac{4}{x^2}$ est un infiniment grand) $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \sim \ln\left(\dfrac{4}{x^2}\right) = -2\ln x + \ln 4 \sim -2\ln x$. Finalement

$$K(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \sim \frac{1}{2}\times -2\ln x = -\ln x.$$

Question 16 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 16 :
A) et B) $f(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,du = \frac{\pi^2}{8}$.
C) et D) Soit $x > 0$. En posant $v = \frac{\pi}{2} - u$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{x}) &= \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\frac{1}{x^2}\cos^2 u + \sin^2 u}\,du = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\cos^2 u + x^2\sin^2 u}\,du\\
&= x\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\frac{\pi}{2}-v}{\sin^2 v + x^2\cos^2 v}\times -dv = \frac{\pi x}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2\cos^2 v+\sin^2 v}\,dv - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v}{x^2\cos^2 v + \sin^2 v}\,dv\\
&= \frac{\pi x}{2}J(x) - f(x).
\end{aligned}$$

Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du &= \frac{1}{x}\int_0^a \frac{1}{x\cos^2 u}\frac{1}{1+(\tan u/x)^2}\ \frac{1}{x\cos^2 u}du\\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\tan a}\frac{1}{1+t^2}\,dt(\text{en posant } t = (\tan u)/x \text{ et donc } dt = 1/x\cos^2 u\ du)\\
&= \frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}(\tan a) = \frac{a}{x}(\text{car } a \in]0, \frac{\pi}{2}[).
\end{aligned}$$

Quand a tend vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient $J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du = \frac{\pi}{2x}$ et donc

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{\pi x}{2}\times\frac{\pi}{2x} - f(x) = \frac{\pi^2}{4} - f(x).$$

Question 17 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 17 :

$h'(u) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos(u)$. h' est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, strictement négative sur $[0, \mathrm{Arccos}(\frac{2}{\pi})[$, strictement positive sur $]\,\mathrm{Arccos}(\frac{2}{\pi}), \frac{\pi}{2}]$ et s'annule en $\mathrm{Arccos}(\frac{2}{\pi})$.

h est décroissante puis croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ mais cela ne suffit pas pour affirmer que h est négative ou nulle. Il manque $h(0) = h(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Question 18 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : Soit $x > 0$. Pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il est connu que $\sin u \leq u$ et d'autre part, Q17 montre que $\frac{2}{\pi}u \leq \sin u$. En résumé, pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{2}{\pi}u \leq \sin u \leq u$. Donc

$$\frac{2}{\pi}\times x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du \leq x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du \leq x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du,$$

ou encore

$$0 \leq \frac{2}{\pi} f(x) \leq xK(x) \leq f(x).$$

Ainsi, $\forall x \in]0,1[$, $0 \leq f(x) \leq xK(x)\frac{\pi}{2}$. Comme $xK(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln x$, $xK(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et il en est de même de $f(x)$.

Question 19 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 19 : Pour $x > 1$, $f(x) = \frac{\pi^2}{4} - f(\frac{1}{x})$ d'après Q16. Donc, d'après Q18 quand x tend vers $+\infty$, $f(x) \to \frac{\pi^2}{4} - 0 = \frac{\pi^2}{4}$.

Question 20 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 20 :

$$\frac{1}{P+Q} - \frac{1}{P} + \frac{Q}{P^2} = \frac{P^2 - P(P+Q) + Q(P+Q)}{P^2(P+Q)} = \frac{Q^2}{P^2(P+Q)}.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x+k)-g(x)}{k} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du\right| &= \left|\frac{1}{k}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{P+Q}\,du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{P}\,du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{uQ}{P^2}\,du\right)\right| \\
&= \frac{1}{|k|}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\left(\frac{1}{P+Q} - \frac{1}{P} + \frac{Q}{P^2}\right)\,du\right| = \frac{1}{|k|}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{uQ^2}{P^2(P+Q)}\,du\right| \\
&= |k|\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2((x+k)\cos^2 u + \sin^2 u)}\,du\right| \\
&\leq |k|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2|(x+k)\cos^2 u + \sin^2 u|}\,du
\end{aligned}$$

Ensuite, $x > \frac{x}{2} > 0$ et $x + k > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$ et donc pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2|(x+k)\cos^2 u + \sin^2 u| = (x\cos^2 u + \sin^2 u)^2((x+k)\cos^2 u + \sin^2 u) \geq$$
$$(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^2(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u) = (\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3.$$

Finalement

$$\left|\frac{g(x+k)-g(x)}{k} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du\right| \leq |k|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}\,du.$$

Enfin quand k tend vers 0, on obtient la dérivabilité de g et pour $x > 0$, $g'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du$.

Question 21 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 21 : Pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ou aussi $f(x) = xg(x^2)$. Mais alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g(x^2) + 2x^2 g'(x^2) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du - 2x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u((x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - 2x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(-x^2\cos^2 u + \sin^2 u))}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du.
\end{aligned}$$

PARTIE IV

Question 22 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 :
A) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5^2(x) - f_6^2(x) = x^4$ et $f_5^2 - f_6^2 \notin E$.
B) et C) $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.
D) La fonction nulle est dans F et ne peut avoir d'inverse pour $\times$.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : Je suppose qu'il y a une erreur d'énoncé et qu'il faut lire

$$f(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\,\mathrm{ch}\,x + (\mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2)\,\mathrm{sh}\,x.$$

Dans ce cas,

$$f(x)e^{-x} = \frac{1}{2}((\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2)x + (\lambda_3 + \mu_3)x^2) + \frac{1}{2}((\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2)x + (\lambda_3 - \mu_3)x^2)e^{-2x}.$$

Comme $((\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2)x + (\lambda_3 - \mu_3)x^2)e^{-2x}$ tend vers 0 en $+\infty$, $f(x)e^{-x}$ tend vers 0 si et seulement si $(\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2)x + (\lambda_3 + \mu_3)x^2$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ce qui équivaut au fait que $(\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2)x + (\lambda_3 + \mu_3)x^2$ est le polynôme nul. En résumé

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2 = \lambda_3 + \mu_3 = 0.$$

De même,

$$f(x)e^{x} = \frac{1}{2}((\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2)x + (\lambda_3 - \mu_3)x^2) + \frac{1}{2}((\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2)x + (\lambda_3 + \mu_3)x^2)e^{2x}.$$

et donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0.$$

Question 24 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 24 : La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est par définition génératrice de E ce qui montre que B) et D) sont fausses. De plus pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^6$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \lambda_2 f_3 + \mu_2 f_4 + \lambda_3 f_5 + \mu_3 f_6 = 0 \Rightarrow f = 0 \\
&\quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{x} = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2 = \lambda_3 + \mu_3 = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0 \\
&\quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0
\end{aligned}$$

La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est libre et donc une base de E.

Question 25 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 25 : $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = f_2$ $D(f_3) = f_1 + f_4$ $D(f_4) = f_2 + f_3$ $D(f_5) = 2f_3 + f_6$ et $D(f_6) = 2f_4 + f_5$. Donc $\forall k \in [\![1, 6]\!]$, $D(f_k) \in E$.
D est linéaire et $D(E) = \text{Vect}(D(f_k))_{1\leq k\leq 6} \subset E$. Donc $D \in \mathscr{L}(E)$.

Question 26 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 26 : La matrice de f dans la base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 27 : C) et D) $D(1) = 0$ montre que D n'est pas injective.
A) et B)

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc D est un automorphisme de E. (Remarque : les fonctions constantes non nulles ne sont pas dans E).

Question 28 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 : $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = f_2$ $D(f_3) = f_1 + f_4$ $D(f_4) = f_2 + f_3$ $D(f_5) = 2f_3 + f_6$ et $D(f_6) = 2f_4 + f_5$.
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_1) = D(f_1) - f_1 = 0$,
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_2) = D(f_2) - f_2 = 0$
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_3) = D(f_1 + f_4) - f_3 = f_1 + f_2 + f_3 - f_3 = f_1 + f_2$
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_4) = D(f_2 + f_3) - f_4 = f_2 + f_1 + f_4 - f_4 = f_1 + f_2$
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_5) = D(2f_3 + f_6) - f_5 = 2(f_1 + f_4) + 2f_4 + f_5 - f_5 = 2f_1 + 4f_4$
- $(D^2 - \mathrm{Id})(f_6) = D(2f_4 + f_5) - f_5 = 2(f_2 + f_3) + 2f_3 + f_6 - f_6 = 2f_2 + 4f_3$

Donc $\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((D^2 - \mathrm{Id})(f_k))_{1\leq k\leq 6} \subset \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Plus précisément,

$$\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(0, 0, f_1 + f_2, f_1 + f_2, 2f_1 + 4f_4, 2f_2 + 4f_3) = \mathrm{Vect}(f_1 + f_2, 2f_1 + 4f_4, 2f_2 + 4f_3).$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id})) \leq 3$ et A) est fausse. De plus pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} a(f_1 + f_2) + b(2f_1 + 4f_4) + c(2f_2 + 4f_3) = 0 &\Rightarrow (a + 2b)f_1 + (a + 2c)f_2 + 4cf_3 + 4bf_4 = 0 \\ &\Rightarrow a + 2b = a + 2c = 4c = 4b = 0 \text{ (car } (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est libre)} \\ &\Rightarrow c = b = a = 0 \end{aligned}$$

$(f_1 + f_2, 2f_1 + 4f_4, 2f_2 + 4f_3)$ est donc une base de $\dim(\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id}))$ et B) est vraie.
$(D^2 - \mathrm{Id})(f_1) = (D^2 - \mathrm{Id})(f_2) = 0$ et $(D^2 - \mathrm{Id})(f_3)$ et $(D^2 - \mathrm{Id})(f_4)$ sont dans $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Donc $\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id})^2 \subset \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et C) est fausse.
$\mathrm{Im}(D^2 - \mathrm{Id})^3 \subset (D^2 - \mathrm{Id})(\mathrm{Vect}(f_1, f_2)) = \{0\}$ et D) est vraie.

Question 29 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : Pour $f \in F$, $(D^2 - \mathrm{Id})(f) = D(D(f)) - \mathrm{Id}(f) = f'' - f$. Donc B) est vraie. f_1 vérifie $f'' - f = 0$ et donc A) est fausse.
Les solutions de $f'' - f = 0$ constituent un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2 et (f_1, f_2) est une famille libre de solutions de cette équation. Donc D) est vraie.
Les solutions de $f'^2 - f$ ne constituent pas un espace vectoriel car $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ est solution et $x \mapsto -\dfrac{x^2}{4}$ ne l'est pas. Donc C) est fausse.

Question 30 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 30 : $(D^2 - \mathrm{Id})^2(f) = (D^4 - 2D^2 + \mathrm{Id})(f) = f^{(4)} - 2f'' + f$. Donc $\mathrm{Ker}(D^2 - \mathrm{Id})^2$ est de dimension 4 et comme f_1, f_2, f_3 et f_4 sont dans ce noyau, D) est vraie.

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 31 : $\mathrm{Ker}((D^2 - \mathrm{Id})^3)$ contient E et est donc de dimension au moins 6.

Question 32 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 32 : $(D^2 - \mathrm{Id})^3(f) = (D^6 - 3D^4 + 3D^2 - \mathrm{Id})(f) = f^{(6)} - 3f^{(4)} + 3f'' - f$ et donc A) est vraie. Le noyau de $\mathrm{Ker}((D^2 - \mathrm{Id})^4)$ est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 8 et est donc de dimension 8. B) est fausse. $E \subset \mathrm{Ker}((D^2 - \mathrm{Id})^3)$ et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}((D^2 - \mathrm{Id})^3)) = 6$. Donc $\mathrm{Ker}((D^2 - \mathrm{Id})^3 = E$ et C) est vraie.

L'équation différentielle $(D^3 - \mathrm{Id})^2(f) = g$ d'inconnue $g \in F$ a toujours des solutions et donc $\mathrm{Im}((D^3 - \mathrm{Id})^2) = F \neq E$.

PARTIE V

Question 33 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 33 : Pour tout réel θ, $P_{n-1}(\cos\theta) + P_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$. Les polynômes $P_{n-1} + P_{n+1}$ et $2XP_n$ coïncident en une infinité de valeurs et donc $P_{n-1} + P_{n+1} = 2XP_n$.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(i\sin\theta)^p\cos^{n-p}\theta\right)\\ &= \sum_{0\leq 2p\leq n}^{n}\binom{n}{2p}(i\sin\theta)^{2p}\cos^{n-2p}\theta = \sum_{0\leq p\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-\cos^2\theta)^p\cos^{n-2p}\theta.\end{aligned}$$

Donc $P_n = \displaystyle\sum_{0\leq p\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-X^2)^pX^{n-2p} = \sum_{0\leq p\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2p}(X^2-1)^pX^{n-2p}$.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 34 : A) $P_n(0) = P_n(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$ si n impair.
B) $P_n(-1) = P_n(\cos\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$.
C) $P_{2n}(0) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Ensuite, pour tout réel θ, $-n\sin(n\theta) = -\sin\theta P'_n(\cos\theta)$ et donc pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $P'_n(\cos\theta) = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ puis $P'_{2n+1}(\cos\theta) = (2n+1)\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$. Quand θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$P'_{2n+1}(0) = (2n+1)\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n(2n+1).$$

D) Quand θ tend vers π,

$$P'_n(\cos\theta) = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = n\frac{(-1)^n\sin(n(\theta-\pi))}{-\sin(\theta-\pi)} \sim (-1)^{n-1}n\frac{n(\theta-\pi)}{\theta-\pi} = (-1)^{n-1}n^2.$$

Question 35 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 35 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après Q33, $P_n = \sum_{0\leq p\leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2p}(X^2-1)^p X^{n-2p}$. Pour $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$, $(2p) + (n-2p) = n$ et donc $\deg(P_n) \leq n$. De plus, le coefficient de X^n vaut

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots &= \frac{1}{2}\left(\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\right) + \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1} \text{ (car } n \neq 0).\end{aligned}$$

Question 36 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$. $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 2XP_2 - P_1 = 4X^3 - 3X$ et $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

