

Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015

6 exercices sur les 18 de probabilités peuvent être traités en Maths Sup.

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 96

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- 1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par les joueur sur une partie.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- 2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Déterminer la loi de Y .

EXERCICE 105

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

- 1) Préciser les valeurs prises par X .
- 2) (a) Déterminer la probabilité $p(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) (a) Calculer $E(X)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 106

- 1) Enoncer et démontrer la formule de BAYES.
- 2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 108

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n -ème tirage est blanche ».

On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1 .

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

EXERCICE 110

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X .

2) Déterminer la loi de Y .

EXERCICE 113

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3) Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.