Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015 - Corrigés

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 96

1) (a) La variable aléatoire X est régie par une loi binomiale. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes (car les tirages se font avec remise) sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et « la boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{4}{5}$.

La variable aléatoire X est régie par une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{5}$. On sait alors que

$$X(\Omega) = [\![0, 5]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, 5]\!],\ p(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

Plus explicitement,

- $p(X = 0) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{1024}{3125} = 0,32768$.
- $p(X = 1) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = \dfrac{256}{625} = 0,4096$.
- $p(X = 2) = 10 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{128}{625} = 0,2048$.
- $p(X = 3) = 10 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{32}{625} = 0,0512$.
- $p(X = 4) = 5 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^4 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{625} = 0,0064$.
- $p(X = 5) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{1}{3125} = 0,00032$.

L'espérance de X est $E(X) = np = 5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ et la variance de X est $V(X) = np(1-p) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

(b) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Par suite, $Y(\Omega) = \{5k - 15,\ k \in [\![0, 5]\!]\} = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$. Ensuite,

$$\forall k \in [\![0, 5]\!],\ p(Y = 5k - 15) = p(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

Ensuite, $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 \times 1 - 15 = -10$ et $V(Y) = V(5X - 15) = 5^2 V(X) = 25 \times \dfrac{4}{5} = 20$.

2) (a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. La loi de probabilité ne change pas si on suppose les tirages simultanés.
Le nombre de tirages simultanés de 5 boules parmi 10 est $\dbinom{10}{5}$.
Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Au cours d'un tirage de 5 boules, on obtient k boules blanches si et seulement si on tire k boules parmi les 2 blanches et $5 - k$ boules parmi les 8 noires. Il y a donc $\dbinom{2}{k} \times \dbinom{8}{5-k}$ tirages où on obtient k boules blanches. Donc,

$$\forall k \in [\![0, 2]\!],\ p(X = k) = \frac{\dbinom{2}{k} \times \dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}.$$

Plus explicitement,

- $p(X = 0) = \dfrac{\dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \dfrac{5 \times 4}{10 \times 9} = \dfrac{2}{9}$.
- $p(X = 1) = \dfrac{2 \times \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \dfrac{2 \times 5 \times 5}{10 \times 9} = \dfrac{5}{9}$.

• $p(X=2)=\dfrac{\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2}}{\dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2}}=\dfrac{5\times 4}{10\times 9}=\dfrac{2}{9}$.

L'espérance de X est $E(X)=0\times\dfrac{2}{9}+1\times\dfrac{5}{9}+2\times\dfrac{2}{9}=1$ et la variance de X est

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+4\times\frac{2}{9}-1^2=\frac{4}{9}.$$

(b) Comme à la question 1), $Y(\Omega)=\{5k-15,\ k\in[\![0,2]\!]\}=\{-15,-10,-5\}$ et

$$\forall k\in[\![0,2]\!],\ p(Y=5k-15)=p(X=k)=\frac{\dbinom{2}{k}\times\dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}.$$

Ensuite, $E(Y)=5E(X)-15=-10$ et $V(Y)=5^2E(X)=\dfrac{100}{9}$.

EXERCICE 105

1) X prend les valeurs 0, 1 ou 2.

2) (a) $X=2$ est l'événement « toutes les boules vont dans le même compartiment ». Il y a 3^n répartitions possibles des n boules dans les 3 compartiments (pour chacune des n boules, il y a 3 possibilités de compartiment). Parmi ces répartitions, il y en a une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 1, une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 2 et une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 3. Donc

$$p(X=2)=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}.$$

(b) Soit E l'événement : « le troisième compartiment est vide et les deux premiers ne le sont pas ». On a alors

$$p(X=1)=3\times p(E).$$

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Soit E_k l'événement « k boules sont dans le compartiment n° 1 et $n-k$ sont dans le compartiment n° 2 ». $E=\displaystyle\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n-1}E_k$ et les E_k, $1\leqslant k\leqslant n-1$, sont deux à deux disjoints. Donc,

$$p(X=1)=3p(E)=3\sum_{k=1}^{n-1}p\left(E_k\right).$$

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Le nombre de répartitions des n boules telles que k d'entre elles soient dans le compartiment n° 1 et $n-k$ soient dans le compartiment n° 2 est encore le nombre de tirages simultanés de k boules parmi les n à savoir $\dbinom{n}{k}$.

Donc $p\left(E_k\right)=\dfrac{\dbinom{n}{k}}{3^n}$. Par suite,

$$p\left(E\right)=3\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}}{3^n}=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}.$$

Enfin,

$$p(X=0)=1-p(X=1)-p(X=2)=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.$$

$$\boxed{p(X=0)=\frac{1}{3^{n-1}},\ p(X=1)=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\text{ et }p(X=2)=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.}$$

3) (a) $\mathsf{E}(X) = 0 \times \dfrac{3^{n-1} - 2^n - 3}{3^{n-1}} + 1 \times \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} + 2 \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^n}{3^{n-1}} = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, s'il y a un grand nombre de boules, il y a peu de chances qu'un compartiment reste vide.

EXERCICE 106

1) Formule de Bayes.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) (a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{2}$.

(b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

EXERCICE 108

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A_n}$ est donc l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$ est un système complet d'événements et $P(A_1) = P\left(\overline{A_1}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_1) + P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\dfrac{17}{35}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n}\right) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

3) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
La fonction affine $x \mapsto -\dfrac{6}{35}x + \dfrac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x = -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{41}{35}x = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{6}{5}\left(p_n - \dfrac{20}{41}\right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$p_n - \frac{20}{41} = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{20}{41}\right) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = -\frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

Pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435} \times \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$.

EXERCICE 110

Ω est l'ensemble des tirages successifs sans remise des $n+2$ boules ou encore l'ensemble des permutations des $n+2$ boules. Le nombre de tirages successifs et sans remise des $n+2$ boules est $(n+2)!$ ou encore $\operatorname{card}(\Omega) = (n+2)!$.

1) L'urne contient $n+2$ boules. La première boule blanche peut apparaître au premier, deuxième ou troisième tirage ou encore $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

• $X = 1$ est l'événement : « la première boule tirée est blanche ». On a n possibilités de tirer la première boule parmi les n blanches puis pour chacune de ces n possibilités, on a $(n+1)!$ possibilités de tirer les $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(X=1)=\frac{n\times(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{n}{n+2}.$$

• $X=3$ est l'événement : « les deux premières boules tirées sont noires ». On a $2!=2$ possibilités de tirer les deux premières boules puis pour chacune de ces deux possibilités, on a $n!$ possibilités de tirer les n boules restantes. Donc,

$$p(X=3)=\frac{2\times n!}{(n+2)!}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

• Enfin

$$\begin{aligned}p(X=2)&=1-p(X=1)-p(X=3)=1-\frac{n}{n+2}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{X(\Omega)=[\![1,3]\!]\text{ et }p(X=1)=\frac{n}{n+2},\ p(X=2)=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}\text{ et }p(X=3)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.}$$

2) La première boule numérotée 1 peut sortir au premier, deuxième, ..., $(n+1)$-ème tirage ou encore $Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.
Soit $k\in[\![2,n+1]\!]$. L'événement $Y=k$ est l'événement « les $k-1$ premières boules ne portent pas le numéro 1 et la k-ème porte le numéro 1 ». Pour les $k-1$ premières boules, on a $n(n-1)\times\ldots\times(n-k+2)=\dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles puis pour chacun des ces tirages on a 2 possibilités pour la k-ème boule et donc $2\times\dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles pour les k premières boules. Pour chacun de ces tirages, on a $(n+2-k)!$ tirages possibles des $n+2-k$ boules restantes. Finalement,

$$p(Y=k)=\frac{\frac{n!}{(n-k+1)!}\times2\times(n+2-k)!}{(n+2)!}=\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

L'événement $Y=1$ est l'événement « la première boule porte le numéro 1 ». Il y a 2 tirages possibles pour la première boule puis pour chacun de ces deux tirages, il y a $(n+1)!$ tirages possibles des $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(Y=1)=\frac{2\times(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2(n+2-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Finalement

$$\boxed{Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]\text{ et }\forall k\in[\![1,n+1]\!],\ p(Y=k)=\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.}$$

EXERCICE 113

1) 1ère solution. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Soit A une partie fixée à k éléments. Le nombre de couples (A,B) tels que $A\subset B$ est encore le nombre de parties B telles que $A\subset B$. Une partie B contenant A est la réunion de A et d'une partie de $\overline{A}$.
Le nombre de parties B contenant A est donc encore le nombre de parties de $\overline{A}$. Il y en a

$$\text{card}\left(\mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right)=2^{n-k}.$$

Ensuite, il y a $\dbinom{n}{k}$ parties à k éléments et donc $\dbinom{n}{k}2^{n-k}$ couples (A,B) tels que $\text{card}(A)=k$ et $A\subset B$. En faisant varier k, on obtient

$$a=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}=(2+1)^n=3^n.$$

2ème solution. Notons F l'ensemble des couples (A,B) tels que $A\subset B$.

Pour $(A,B) \in F$, définissons $\varphi_{(A,B)}: \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1,2\} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \setminus A \\ 2 \text{ si } x \notin B \end{array}\right. \end{array}$. $\varphi_{(A,B)}$ est une application de E dans $\{0,1,2\}$.

Soit alors $\varphi: \begin{array}{ccc} F & \to & \{0,1,2\}^E \\ (A,B) & \mapsto & \varphi_{(A,B)} \end{array}$. φ est bien sûr une bijection. Démontrons-le.

- φ est une application de F vers $\{0,1,2\}^E$.

- Soit $((A,B),(A',B')) \in F^2$ tel que $\varphi_{(A,B)} = \varphi_{(A',B')}$.
Soit $x \in E$. $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{(A,B)}(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{(A',B')}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A'$. Donc, $A = A'$.
Soit $x \in E$. $x \in B \setminus A \Leftrightarrow \varphi_{(A,B)}(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi_{(A',B')}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B' \setminus A'$. Donc, $B \setminus A = B' \setminus A'$ puis $B = B'$ car $A \subset B$, $A' \subset B'$ et $A = A'$. Finalement, $(A,B) = (A',B')$.
On a montré que φ est injective.

- Soit $f \in \{0,1,2\}^E$. Soient A l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 0$ puis B la réunion de A et de l'ensemble des x de E tels que $f(x) = 1$. Alors $A \subset B$ puis $\varphi((A,B)) = f$. On a montré que φ est surjective et finalement que φ est bijective.

Puisque φ est une bijection, $\text{card}(F) = \text{card}\left(\{0,1,2\}^E\right) = 3^n$.

$$\boxed{a = 3^n.}$$

2) Le nombre de couples (A,B) tels que $A \cap B = \varnothing$ est encore le nombre de couples $(A, A \cup B)$ tels que $A \cap B = \varnothing$. C'est aussi le nombre de couples (A,B') tels que $A \subset B'$. Il y en a

$$\boxed{b = a = 3^n.}$$

3) Pour chaque couple (A,B) tels que $A \cap B = \varnothing$, il y a exactement un triplet $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ à savoir le triplet $(A, B, C_E(A \cup B))$. Réciproquement, chaque triplet $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$ fournit un et un seul couple $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$. Donc,

$$\boxed{c = b = a = 3^n.}$$

