# Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015

11 exercices d'analyse sur les 58 peuvent être traités en Maths Sup.

# BANQUE ANALYSE

## EXERCICE 1

**1)** On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

**2)** Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

## EXERCICE 2 (la question 2) est modifiée)

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$

**1)** Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive $G$ définie sur l'intervalle $]-1,3[$ telle que $G(1) = 0$.

**2)** Pour tout entier naturel $n$, donner le développement limité de la fonction $f$ à l'ordre $n$ en $0$.

**3)** En déduire $G^{(3)}(0)$.

## EXERCICE 3

**1)** On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définition respectifs.

**2)** On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

**3)** Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

## EXERCICE 4

**1)** Enoncer le théorème des accroissements finis.

**2)** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in ]a,b[$.
On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si $f'$ admet une limite en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

**3)** Prouver que l'implication : ($f$ est dérivable en $x_0$) $\Longrightarrow$ ($f'$ admet une limite finie en $x_0$) est fausse.

**Indication :** on pourra considérer la fonction $g$ définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

## EXERCICE 5

**1)** On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** Cas $\alpha \leqslant 0$.

En utilisant une minoration très simple de $u_n$, démontrer que la série diverge.

**(b)** Cas $\alpha > 0$.

Etudier la nature de la série.
**Indication :** on pourra utiliser la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

**2)** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

**EXERCICE 7**

**1)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

**2)** Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.

($i$ est ici le nombre complexe de carré égal à $-1$)

**EXERCICE 42**

On considère les deux équations suivantes :

$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

**1)** Résoudre l'équation $(H)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

**2)** Résoudre l'équation $(E)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

**EXERCICE 43**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

**1)** **(a)** Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur $x_0$, le sens de variation de $(u_n)$.

**(b)** Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**2)** Déterminer l'ensemble des fonctions $h$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

**EXERCICE 47**

**1)** Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$.

**(a)** Quel est le sens géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ?

**(b)** Démontrer, lorsque $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

**2)** Déterminer la limite de la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2+k^2}$.

**EXERCICE 55**

Soit $a$ un nombre complexe.
On note $E$ l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \text{ avec } (u_0,u_1) \in (\mathbb{C})^2.$$

**1)** Prouver que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
Déterminer, en le justifiant, la dimension de $E$.

**2)** Dans cette question, on considère la suite de $E$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel $n$, le nombre complexe $u_n$ en fonction de $n$.
**Indication :** discuter suivant les valeurs de $a$.

**EXERCICE 56**

On considère la fonction $\mathsf{H}$ définie sur $]1,+\infty[$ par $\mathsf{H}(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

**1)** Montrer que $\mathsf{H}$ est $C^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

**2)** Montrer que la fonction $u$ définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.

**3)** En utilisant la fonction $u$ de la question 2), calculer la limite en $1^+$ de la fonction $\mathsf{H}$.