

**BANQUE ANALYSE**

**EXERCICE 1**

1) • Si on suppose que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Il existe alors un entier  $n_0$  tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$ . En particulier, pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{u_n}{v_n} > 0$  et donc  $u_n$  et  $v_n$  ont même signe.

• Si on ne suppose pas que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n &\Rightarrow \exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n - v_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \\ &\Rightarrow \exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ , il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $\varepsilon_n > -\frac{1}{2}$  et donc  $1 + \varepsilon_n > \frac{1}{2}$ . En particulier, pour  $n \geq n_0$ ,  $1 + \varepsilon_n > 0$ .

Pour  $n \geq n_0$ , on a donc  $u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n$  et  $1 + \varepsilon_n > 0$ . Pour  $n \geq 0$ , on en déduit que

- si  $v_n > 0$ , alors  $u_n > 0$ ,
- si  $v_n < 0$ , alors  $u_n < 0$ ,
- si  $v_n = 0$ , alors  $u_n = 0$ .

Donc, pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  et  $v_n$  ont même signe.

2) Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc,  $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$  et en particulier, à partir d'un certain rang,  $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ .

**EXERCICE 2**

Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ , on pose  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(3-x)} = -\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}$ .

1) Il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ ,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-3}.$$

- $c = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = -\frac{1}{(3+1)^2} = -\frac{1}{16}$ .
- $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 f(x) = -\frac{1}{-1-3} = \frac{1}{4}$ .
- $a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$  et donc  $a = -c = \frac{1}{16}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}, f(x) = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-3} \right).$$

$f$  est continue sur  $] -1, 3[$  en tant que fraction rationnelle définie sur  $] -1, 3[$  et donc  $f$  admet des primitives sur  $] -1, 3[$ .

Les primitives de  $f$  sur  $] -1, 3[$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{1}{16} \left( \ln(x+1) - \frac{4}{x+1} - \ln(3-x) \right) + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Une telle primitive s'annule en 1 si et seulement si  $\frac{1}{16} \left( \ln(2) - \frac{4}{2} - \ln(2) \right) + \lambda = 0$  ou encore  $\lambda = \frac{1}{8}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}, G(x) = \frac{1}{16} \left( \ln(x+1) - \frac{4}{x+1} - \ln(3-x) + 2 \right).$$

2) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{1}{3-x} \right) = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{1+x} + 4 \times \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{16} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + 4 \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) x^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{3^k} \right) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{16} \left( \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k (4k+5) + \frac{1}{3^{k+1}} \right) x^k \right) + o(x^n) \end{aligned}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{16} \left( \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k (4k+5) + \frac{1}{3^{k+1}} \right) x^k \right) + o(x^n).$$

$$3) G^{(3)}(0) = (G')''(0) = f''(0) 2! a_2 = 2! \times \frac{1}{16} \left( (-1)^2 (4 \times 2 + 5) + \frac{1}{3^{2+1}} \right) = \frac{13 \times 27 + 1}{8 \times 27} = \frac{352}{8 \times 27} = \frac{44}{27}.$$

$$G^{(3)}(0) = \frac{44}{27}.$$

### EXERCICE 3

1) • Montrons par récurrence que tout entier naturel  $k$ ,  $g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ .

- La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g^{(0)}(x) = e^{2x} = 2^0 e^{2x}$ .

La propriété à démontrer est donc vraie quand  $k = 0$ .

- Soit  $k \geq 0$ . Supposons que  $g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$  et montrons que  $g$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g^{(k+1)}(x) = 2^{k+1} e^{2x}$ .

La fonction  $g^{(k)}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ou encore la fonction  $g$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$g^{(k+1)}(x) = \left( g^{(k)} \right)'(x) = 2^k \times 2e^{2x} = 2^{k+1} e^{2x}.$$

On a montré par récurrence que tout entier naturel  $k$ ,  $g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ .

• Montrons par récurrence que tout entier naturel  $k$ ,  $h$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

- La fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  en tant que fraction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$h^{(0)}(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1(-1)^0 0!}{(1+x)^{1+0}}.$$

La propriété à démontrer est donc vraie quand  $k = 0$ .

- Soit  $k \geq 0$ . Supposons que  $h$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$  et

montrons que  $h$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $h^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$ .

La fonction  $h^{(k)}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  en tant que fraction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  ou encore la fonction  $h$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$h^{(k+1)}(x) = \left( h^{(k)} \right)'(x) = (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(1+x)^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(1+x)^{k+2}}.$$

On a montré par récurrence que tout entier naturel  $k$ ,  $h$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

2) La fonction  $f = g \times h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  en tant que produit de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la formule de LEIBNIZ, pour tout réel  $x$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \times \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)! (1+x)^{k+1}} \\ &= \frac{n! e^{2x}}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!} (1+x)^{n-k} = \frac{n! e^{2x} (-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} (1+x)^k. \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{n! e^{2x} (-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} (1+x)^k.$$

3) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ , si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$ , alors  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

• Pour  $n = 1$ , si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $fg$  est dérivable sur  $I$  et

$$(fg)' = fg' + f'g = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

La formule est donc vraie quand  $n = 1$ .

• Soit  $n \geq 1$ . Supposons que si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$ , alors  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

et montrons que si  $f$  et  $g$  sont  $n + 1$  fois dérivables sur  $I$ , alors  $f \times g$  est  $n + 1$  fois dérivable sur  $I$  et que

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

Soient donc  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n + 1$  fois dérivables sur  $I$ . En particulier,  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$  et par hypothèse de récurrence,  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)} g^{(n-k)}$  est dérivable sur  $I$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $I$  car  $k \leq n$  et  $n-k \leq n$  et donc  $(f \times g)^{(n)}$  est dérivable sur  $I$  en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur  $I$ . Donc,  $f \times g$  est  $n + 1$  fois dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n+1)} &= \left( (f \times g)^{(n)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$ , alors  $f \times g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

#### EXERCICE 4

##### 1) Théorème des accroissements finis.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une application de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

2) Posons  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ .

Soit  $x \in ]x_0, b]$ . Par hypothèse,  $f$  est continue sur  $[x_0, x]$  et dérivable sur  $]x_0, x[$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c = c(x) \in ]x_0, x[$  tel que  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x))$ .

Puisque pour tout  $x$  de  $]x_0, b]$ , on a  $x_0 < c(x) < x$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} c(x) = x_0$ .

D'après le théorème de composition des limites,  $f'(c(x))$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures. Ainsi, le taux  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

$f$  est donc dérivable à droite en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = \ell$ .

De même, en remplaçant l'intervalle  $[x_0, x]$  par l'intervalle  $[x, x_0]$  quand  $x < x_0$ , on montre que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$  et que  $f'_g(x_0) = \ell$ .

Finalement,  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \ell = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ .

3) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

• Pour tout réel non nul  $x$ ,  $|g(x)| \leq x^2$ . On en déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0 = f(0)$ .  $g$  est donc continue en  $0$ . Puisque d'autre part,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour tout réel non nul  $x$ ,  $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Pour tout réel non nul  $x$ ,  $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right| \leq |x|$  et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$ . Par suite,  $g$  est dérivable en  $0$  et  $g'(0) = 0$ .

•  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout réel non nul  $x$ ,

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$  et  $v_n = \frac{1}{2n\pi}$ . Les suites  $u$  et  $v$  sont deux suites tendant vers  $0$  quand  $n$  tend vers

$+\infty$ . Mais  $g'(u_n) = 2u_n$  tend vers  $0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et  $g'(v_n) = -1$  tend vers  $-1$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que la fonction  $g'$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $0$ .

Finalement, l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fautive.

#### EXERCICE 5

1) (a) Supposons  $\alpha \leq 0$ . Pour tout  $n \geq 3$ ,

$$u_n = \frac{1}{n} (\ln n)^{-\alpha} \geq \frac{1}{n} (\ln 3)^{-\alpha} \geq \frac{1}{n}.$$

Puisque la série de terme général  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , diverge, la série de terme général  $u_n$  diverge.

(b) Supposons  $\alpha > 0$ . Pour  $x > 1$ , posons  $f_\alpha(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ . Les deux fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto (\ln x)^\alpha$  sont positives et croissantes sur  $]1, +\infty[$  et donc la fonction  $x \mapsto x(\ln x)^\alpha$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ . Mais alors,  $f_\alpha$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$  en tant qu'inverse d'une fonction strictement positive et croissante sur  $]1, +\infty[$ .

**1er cas.** Supposons  $\alpha \in ]0, 1]$ . Pour tout  $k \geq 3$ ,  $(\ln k)^\alpha \leq \ln k$  (par croissance de la fonction  $x \mapsto (\ln x)^x$  puisque  $\ln k \geq 1$ ) puis  $\frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \geq \frac{1}{k \ln k}$ . Puisque la fonction  $f_1$  est continue et décroissante sur  $]1, +\infty[$ , pour  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} &\geq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = (n+1)(\ln(n+1) - 1) - 3(\ln 3 - 1). \end{aligned}$$

Puisque  $(n+1)(\ln(n+1) - 1) - 3(\ln 3 - 1)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$  et donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

**2ème cas.** Supposons  $\alpha \in ]1, +\infty[$ . Pour tout  $k \geq 3$ , on a  $[k-1, k] \subset ]1, +\infty[$ . Puisque  $f_\alpha$  est continue et décroissante sur  $]1, +\infty[$ , pour  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} &\leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{(\alpha-1)(\ln x)^{\alpha-1}} \right]_2^n = \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}} \\ &\leq \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, chaque  $u_n$  est positif et la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=3}^n u_k \right)_{n \geq 3}$  est majorée. On en déduit que la série de terme général  $u_n$  converge.

En résumé,

la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

$$\begin{aligned} 2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \times e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \text{ Par suite,} \\ e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e - e \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n}, \end{aligned}$$

puis

$$\frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{e}{2n} \times 1}{(\ln(n^2))^2} = \frac{e}{8n \ln^2(n)}.$$

Puisque  $2 > 1$ , la série converge d'après la question 1).

## EXERCICE 7

1) Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites positives et équivalentes.

Il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n(1 + \varepsilon_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ , il existe un rang  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a  $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$  ou encore, plus explicitement,

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq 2v_n \text{ et } 0 \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n \leq 2u_n.$$

Si la série de terme général  $u_n$  converge, il en est de même de la série de terme général  $2u_n$  puis de la série de terme général  $v_n$ .

Si la série de terme général  $v_n$  converge, il en est de même de la série de terme général  $2v_n$  puis de la série de terme général  $u_n$ .

En résumé, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si la série de terme général  $v_n$  converge. Ceci montre que les séries de termes généraux respectifs  $u_n$  et  $v_n$  sont de même nature.

2) Pour  $n \geq 2$ , posons  $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln n}$ .

$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}\ln n} > 0$ . Donc la série de terme général  $u_n$  est de même nature que la série de terme général  $v_n = \frac{1}{n^{3/2}\ln n}$ .

Ensuite,  $\frac{1}{n^{3/2}\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$  et puisque  $\frac{3}{2} > 1$ , la série de terme général  $v_n$  converge. On en déduit que la série de

terme général  $u_n$  converge et il en est de même de la série de terme général  $\frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln n}$

## EXERCICE 42

1) Sur  $]0, +\infty[$ , l'équation (H) est équivalente à l'équation  $y' - \frac{3}{2x}y = 0$ . La fonction  $x \mapsto -\frac{3}{2x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et donc les solutions de (H) sur  $]0, +\infty[$  constituent un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (H) sur } ]0, +\infty[ &\Leftrightarrow \forall x > 0, f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, e^{-\frac{3}{2}\ln x}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln x}f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \left(\frac{f}{x^{3/2}}\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, \frac{f(x)}{x^{3/2}} = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, f(x) = \lambda x^{3/2}. \end{aligned}$$

Les solutions de (H) sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda x^{3/2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2) • Sur  $]0, +\infty[$ , l'équation (E) est équivalente à l'équation  $y' - \frac{3}{2x}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Les fonctions  $x \mapsto -\frac{3}{2x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$  et donc les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$  constituent un  $\mathbb{R}$ -espace affine de dimension 1.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } ]0, +\infty[ &\Leftrightarrow \forall x > 0, f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0, e^{-\frac{3}{2}\ln x}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln x}f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\ln x}}{2\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \left(\frac{f}{x^{3/2}}\right)'(x) = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, \frac{f(x)}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

• Soit  $f$  une éventuelle solution de (E) sur  $]0, +\infty[$ . Nécessairement,  $f(0) = 0$  (égalité fournie par (E)) et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}$  ou encore, nécessairement

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \geq 0, f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}.$$

Réciproquement, une telle fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et solution de (E) sur  $]0, +\infty[$  et d'autre, si elle est dérivable en 0 à droite, vérifie encore (E) pour  $x = 0$ . Donc, une telle fonction est solution de (E) sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si elle est dérivable en 0 à droite. Mais pour tout réel  $\lambda$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{2}$  et on en déduit que  $f$  n'est pas dérivable en 0 à droite.

L'équation (E) n'admet pas de solution sur  $[0, +\infty[$ .

### EXERCICE 43

1) (a) Le signe d'un réel  $x$  est défini par  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

La fonction  $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Par suite, pour tout entier naturel  $n$

$$\operatorname{sgn}(u_{n+2} - u_{n+1}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Arctan}(u_{n+1}) - \operatorname{Arctan}(u_n)) = \operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n).$$

La suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de signe constant ou encore la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Déterminons précisément le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $x_0$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , Posons  $f(x) = x - \operatorname{Arctan}(x)$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est strictement positive sur  $\mathbb{R}^*$ . Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f(0) = 0$ ,  $f$  est strictement négative sur  $] -\infty, 0[$  et strictement positive sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit que

- $\forall x > 0$ ,  $\operatorname{Arctan}(x) < x$ ,
- $\forall x < 0$ ,  $\operatorname{Arctan}(x) > x$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(\operatorname{Arctan}(x) = x \Leftrightarrow x = 0)$ .

On en déduit encore que

- si  $u_0 > 0$ , alors  $u_1 < u_0$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante,
- si  $u_0 < 0$ , alors  $u_1 > u_0$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante,
- si  $u_0 = 0$ , alors  $u_1 = u_0$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

(b) Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $|u_n| = |\operatorname{Arctan}(u_{n-1})| \leq \frac{\pi}{2}$ . Donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n| \leq \operatorname{Max}\left\{|u_0|, \frac{\pi}{2}\right\}$ . La suite  $u$  est donc bornée et monotone. On en déduit que la suite  $u$  est convergente. Soit  $\ell$  la limite de la suite  $u$ . Par continuité de la fonction  $\operatorname{Arctan}$  sur  $\mathbb{R}$  et donc en  $\ell$ ,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(u_n) = \operatorname{Arctan}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = \operatorname{Arctan}(\ell).$$

$\ell$  est donc un point fixe de la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ . L'étude de la fonction  $f$  effectuée en a) montre alors que  $\ell = 0$ .

On a montré que pour tout réel  $x_0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et a pour limite 0.

2) Soit  $h$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = x_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$  puis  $v$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = h(u_n)$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = h(u_n) = h(\operatorname{Arctan}(u_n)) = h(u_{n+1}) = v_{n+1}.$$

La suite  $v$  est donc constante et en particulier convergente, de limite  $v_0 = h(x_0)$ . D'autre part, d'après la question 1), la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite 0. Maintenant, la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier continue en 0. On en déduit que

$$h(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = h\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = h(0).$$

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $h(x) = h(0)$  et donc la fonction  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

Les fonctions solutions sont les fonctions constantes.

## EXERCICE 47

1) (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\varphi_n$  la fonction en escaliers sur  $[a, b]$  définie par

$$\forall x \in [a, b], \varphi_n(x) = \begin{cases} f\left(\frac{k}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

Alors,  $R_n(f) = \int_a^b \varphi_n(x) dx$ . Si  $f$  est positive,  $R_n(f)$  est la somme des aires des rectangles  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \times \left[0, f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$  et plus généralement si  $f$  est de signe quelconque,  $R_n(f)$  est l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses et le graphe de  $\varphi_n$ .

(b) Supposons  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - R_n(f) &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx, \end{aligned}$$

puis  $\left| \int_0^1 f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx$ . Puisque la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, 1]$ , la fonction  $f'$  est définie et bornée sur ce segment. Soit  $M$  un majorant de la fonction  $|f'|$  sur ce segment. On sait que l'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer que la fonction  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur le segment  $[0, 1]$ . Par suite

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - R_n(f) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{M}{n} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{M}{n^2} = \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} = 0$ , on a montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$ .

2) Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} \times \frac{1}{3 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

On applique alors le 1) à la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc la suite  $(x_n)$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \int_0^1 \frac{dx}{3 + x^2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n^2 + k^2} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

## EXERCICE 55

1) Vérifions que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

- La suite nulle est dans  $E$ .
- Soient  $(u, v) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ . Pour tout entier naturel  $n$



$$\begin{aligned}
 (\lambda u + \mu v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(2a u_{n+1} + 4(ia - 1)u_n) + \mu(2a v_{n+1} + 4(ia - 1)v_n) \\
 &= 2a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 4(ia - 1)u_n(\lambda u_n + \mu v_n) = 2a(\lambda u + \mu v)_{n+1} + 4(ia - 1)u_n(\lambda u + \mu v)_n,
 \end{aligned}$$

et donc  $\lambda u + \mu v \in E$ .

On a montré que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Montrons que  $\dim_{\mathbb{C}}(E) = 2$ . Pour cela, considérons  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^2$  et montrons que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

•  $\varphi$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{C}^2$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0, u_1) + \mu(v_0, v_1) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

Donc,  $\varphi$  est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{C}^2$ .

• Soit  $u \in E$  tel que  $\varphi(u) = 0$ . On a donc  $u_0 = u_1 = 0$ . Mais alors, par récurrence double, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 0$  et donc la suite  $u$  est nulle. Ceci montre que  $\varphi$  est injective.

• Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = a$ ,  $u_1 = b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 2a u_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ .  $u$  est un élément de  $E$  tel que  $\varphi(u) = (a, b)$ . Ceci montre que  $\varphi$  est surjective.

Finalement,  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que  $\dim_{\mathbb{C}}(E) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ .

2) L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est

$$z^2 - 2az + 4(1 - ia) = 0 \quad (E_c).$$

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta' = a^2 - 4(1 - ia) = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2.$$

**1er cas.** Si  $a \neq -2i$ ,  $(E_c)$  admet deux solutions distinctes à savoir  $z_1 = a - (a + 2i) = -2i$  et  $z_2 = a + (a + 2i) = 2(a + i)$ . On sait alors que les éléments de  $E$  sont les suites de la forme

$$(\lambda(-2i)^n + \mu(2(a + i))^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

De plus, d'après les formules de CRAMER,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ (-2i)\lambda + 2(a + i)\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2(a + i) \end{vmatrix}}{2(a + 2i)} \text{ et } \mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 1 \end{vmatrix}}{2(a + 2i)} \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2a - 1 + 2i}{2(a + 2i)} \text{ et } \mu = \frac{1 + 2i}{2(a + 2i)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } a \neq -2i, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2(a + 2i)} ((2a - 1 + 2i)(-2i)^n + (1 + 2i)(2(a + i))^n).$$

**2ème cas.** Si  $a = -2i$ ,  $(E_c)$  admet une solution double à savoir  $z = -2i$ . On sait alors que les éléments de  $E$  sont les suites de la forme

$$((\lambda n + \mu)(-2i)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

De plus,

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ (-2i)(\lambda + \mu) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -1 + \frac{i}{2} \text{ et } \mu = 1.$$

$$\text{Si } a = -2i, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left( \left( -1 + \frac{i}{2} \right) n + 1 \right) (-2i)^n.$$

**EXERCICE 56**

1) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$  est continue sur  $]1, +\infty[$  en tant qu'inverse d'une fonction continue sur  $]1, +\infty[$  et ne s'annule pas sur  $]1, +\infty[$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ .

Soit  $x > 1$ . Alors  $1 < x < x^2$  et donc  $H(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$  existe. De plus,  $H(x) = F(x^2) - F(x)$ .

La fonction  $x \mapsto x^2$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  à valeurs dans  $]1, +\infty[$  et la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ . Donc la fonction  $x \mapsto F(x^2)$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ . Mais alors,  $H$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ . De plus, pour tout  $x > 1$ ,

$$H'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

$H$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ .

2) Pour  $x > 1$ , posons  $h = x - 1$  ou encore  $x = 1 + h$  de sorte que  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures si et seulement si  $h$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} \\ &\stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} - \frac{1}{h} \stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + o(h)} - 1 \right) \stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h} \left( 1 + \frac{h}{2} + o(h) - 1 \right) \\ &\stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \frac{1}{2}$ .

3) La fonction  $u$  est donc prolongeable par continuité en 1 en posant  $u(1) = \frac{1}{2}$  (on note encore  $u$  le prolongement obtenu).

Soit  $x > 1$ .

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \left( u(t) + \frac{1}{t-1} \right) dt = \int_x^{x^2} u(t) dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \\ &= \int_x^{x^2} u(t) dt + [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} u(t) dt + \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \\ &= \int_x^{x^2} u(t) dt + \ln(x+1). \end{aligned}$$

Puisque  $u$  est définie et continue sur  $[1, +\infty[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} u(t) dt = \int_1^1 u(t) dt = 0$  et d'autre part,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x+1) = \ln(2)$ .

Donc,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = \ln(2)$ .