

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59

extbf1) (a) Si $P \neq 0$, $\deg(f(P)) = \text{DEG}(P - P') = \deg(P)$ et en particulier, $f(P) \neq 0$. Par contraposition, $\forall P \in E$, $[f(P) = 0 \Rightarrow P = 0]$. Donc le noyau de l'endomorphisme f est $\{0\}$.

Par suite f est un endomorphisme injectif de l'espace de dimension finie E . On sait que f est un automorphisme de E . En particulier, f est bijectif.

(b) $f(1) = 1$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. Donc la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Le déterminant de la matrice triangulaire A est égal à 1 et en particulier n'est pas nul. Donc, $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ ou encore $f \in \text{GL}(E)$.

2) Soit $Q \in E$. $Q^{(n+1)} = 0$ et donc

$$\begin{aligned} Q &= Q - Q^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n (Q^{(k)} - Q^{(k+1)}) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \sum_{k=0}^n f(Q^{(k)}) = f\left(\sum_{k=0}^n Q^{(k)}\right) \quad (\text{car } \deg\left(\sum_{k=0}^n Q^{(k)}\right) = \deg(Q) \leq n). \end{aligned}$$

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$ est un élément de E tel que $f(P) = Q$. On sait de plus que le polynôme P est uniquement défini.

EXERCICE 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b & c + 2d \\ 2a + 4b & 2c + 4d \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 4b = 0 \\ c + 2d = 0 \\ 2c + 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2b & -2d \\ b & d \end{pmatrix}, (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2) En particulier, $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ car par exemple, la matrice non nulle $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\text{Ker}(f)$. Puisque f est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, on sait que f n'est ni injectif, ni surjectif.

3) • D'après la question 1), $\text{Ker}(f) = \left\{ b \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(B, C)$ où $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B, C) est déjà une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$. De plus, les matrices B et C ne sont pas colinéaires et donc la famille (B, C) est libre. Finalement, (B, C) est une base de $\text{Ker}(f)$.

• D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.

La matrice $D = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $E = \frac{1}{2}f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\text{Im}(f)$. De plus, les matrices D et E ne sont pas colinéaires. Donc, (D, E) est une base de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 62

1) Soit $x \in E$. $x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(g \circ f)$. Ceci montre que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.

Réciproquement, pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(g \circ f) &\Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow f(g(f(x))) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \text{ (car } f \circ g = \text{Id)} \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker}(f). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$.

On a montré que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

2) Pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) \in \text{Im}(g)$. Ceci montre que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Réciproquement, puisque $f \circ g = \text{Id}$, pour tout $x \in E$, $g(x) = g(f(g(x))) \in \text{Im}(g \circ f)$. Ceci montre que $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$.

On a montré que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

3) Puisque $f \circ g = \text{Id}$,

$$(g \circ f)^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ \text{Id} \circ f = g \circ f.$$

Donc, $g \circ f$ est un projecteur. On sait alors que $E = \text{Ker}(g \circ f) \oplus \text{Im}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ (que l'on soit en dimension finie ou pas).

On a montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

EXERCICE 64

1) Dans cette question, on suppose que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

• Pour tout $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}(f)$. Ceci montre que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

• Soit $x \in E$. Puisque $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$, il existe $(y, z) \in E \times \text{Ker}(f) / x = f(y) + z$. Mais alors, $f(x) = f(f(y)) + f(z) = f^2(y)$. Donc, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}(f^2)$. Ceci montre que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$ et finalement que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

On a montré que : $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f \Rightarrow \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2) (a) D'après la question 1), on a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Puisque $\dim(E) < \infty$, on en déduit que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Im}f^2)$.

D'autre part, on a toujours $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. En effet, pour tout $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(f^2).$$

Par suite, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$. Mais alors, le théorème du rang permet d'écrire

$$\begin{aligned} \text{Im}f = \text{Im}f^2 &\Leftrightarrow \dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Im}f^2) \Leftrightarrow n - \dim(\text{Ker}f) = n - \dim(\text{Ker}f^2) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}f) = \dim(\text{Ker}f^2) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2. \end{aligned}$$

On a montré que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

(b) On suppose dans cette question que $\text{Im}f = \text{Im}f^2$. D'après la question précédente, $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

Soit $x \in \text{Im}f \cap \text{Ker}f$. Donc $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On en déduit que $f^2(y) = 0$ et donc que $y \in \text{Ker}f^2 = \text{Ker}f$ puis que $x = f(y) = 0$. Ceci montre que $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$.

D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = n$.

En résumé, $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$ et $\dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = n$. On sait alors que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

On a montré que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Rightarrow E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

EXERCICE 71

Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 , sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1) $D = \text{Vect}(v_3)$ où $v_3 = (1, 2, 3)$. Puisque $1 + 2 + 3 = 6 \neq 0$, $v_3 \notin P$ et donc $D \cap P = \{0\}$. Comme d'autre part, $\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u - \lambda v_3 \in P \Leftrightarrow (x - \lambda, y - 2\lambda, z - 3\lambda) \in P \Leftrightarrow x - \lambda + y - 2\lambda + z - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}(x + y + z).$$

Le projeté de u sur P parallèlement à D est

$$p(u) = u - \frac{x + y + z}{6} v_3 = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{6} (1, 2, 3) = \left(\frac{5x - y - z}{6}, \frac{-2x + 4y - 2z}{6}, \frac{-3x - 3y + 3z}{6} \right).$$

Puisque $\begin{pmatrix} \frac{5x - y - z}{6} \\ \frac{-2x + 4y - 2z}{6} \\ \frac{-3x - 3y + 3z}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Une base de P est (v_1, v_2) où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$. Puisque $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$, on sait que (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Dans cette base, la matrice de p est $\text{diag}(1, 1, 0)$.

Une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale est donc (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (1, 2, 3)$.

EXERCICE 76

1) (a) **Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.** $\forall x \in E, |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \|\lambda x - y\|^2$. On a d'une part $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$ et d'autre part $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \|y\|^2$.

1er cas. Si $x = 0$, $|(x|y)| = 0$ et $\|x\| \times \|y\| = 0$. Dans ce cas, $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\| = 0$ et en particulier, l'inégalité est vraie.

2ème cas. Si $x \neq 0$, P est un trinôme du second degré, positif sur \mathbb{R} . On sait alors que son discriminant réduit est négatif ou nul ce qui fournit

$$0 \geq \Delta' = (x|y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Par suite, $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ puis, en prenant la racine carrée des deux membres, $|(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$.

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est démontrée dans tous les cas.

(b) **Cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.** $\forall x \in E, |(x|y)| = \|x\| \times \|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ liée.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après 1)

$$\begin{aligned} |(x|y)| = \|x\| \times \|y\| &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \Delta' = 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / P(\lambda_0) = 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / \|\lambda_0 x - y\|^2 = 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / y = \lambda_0 x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \text{ liée.} \end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

$$2) \text{ Posons } F = \left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}.$$

On sait que l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

Soit $f \in E$. Les fonctions f et $\frac{1}{f}$ sont continues sur $[a, b]$. Donc, $\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$ existe. De plus, puisque les fonctions f et $\frac{1}{f}$ sont positives sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt = \int_a^b (\sqrt{f(t)})^2 dt \times \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt = \|\sqrt{f}\|^2 \left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2.$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ permet d'affirmer que

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq \left(\int_a^b \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} dt\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt\right)^2 = (b-a)^2.$$

Le nombre $(b-a)^2$ est donc un minorant de l'ensemble F . De plus, si f est la fonction constante $x \mapsto 1$, f est un élément de E tel que $\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt = (b-a)^2$.

Ceci prouve que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet un minimum et en particulier une borne inférieure m et que $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77

1) Soit A un sous-espace vectoriel de E .

Soit $x \in A$. Alors $\forall y \in A^\perp, (x|y) = 0$ et donc $x \in (A^\perp)^\perp$. Ceci montre que $A \subset (A^\perp)^\perp$. D'autre part, puisque E est de dimension finie,

$$\dim\left((A^\perp)^\perp\right) = \dim(E) - \dim(A^\perp) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(A)) = \dim(A).$$

En résumé, A est un sous-espace vectoriel de $(A^\perp)^\perp$ et $\dim(A) = \dim\left((A^\perp)^\perp\right) < +\infty$. On en déduit que $(A^\perp)^\perp = A$.

2) (a) • $F \subset (F+G)$ et $G \subset (F+G)$. Donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ puis $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

• Un élément de $F^\perp \cap G^\perp$ est orthogonal à tout élément de F et de G puis à toute somme d'un élément de F et de G par bilinéarité du produit scalaire et est donc dans $(F+G)^\perp$. Ceci montre que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Finalement, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) D'après les deux questions précédentes,

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G.$$

En prenant l'orthogonal des deux membres, on obtient

$$(F \cap G)^\perp = \left((F^\perp + G^\perp)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

On a montré que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

EXERCICE 78

1) (a) Soit $(x, y) \in E^2$. D'après une identité de polarisation,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}(x) | \mathbf{u}(y)) &= \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{u}(x) + \mathbf{u}(y)\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(y)\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{u}(x+y)\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u}(x-y)\|^2 \right) \quad (\text{car } \mathbf{u} \text{ est linéaire}) \\
&= \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \frac{1}{4} \|x-y\|^2 \right) \quad (\text{par hypothèse sur } \mathbf{u}) \\
&= (x | y).
\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall(x, y) \in E^2, (\mathbf{u}(x) | \mathbf{u}(y)) = (x | y)$.

(b) Soit $x \in E$. Puisque \mathbf{u} conserve la norme,

$$x \in \text{Ker}(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{u}(x) = 0 \Rightarrow \|\mathbf{u}(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc $\text{Ker}(\mathbf{u}) = \{0\}$. Puisque E est de dimension finie, on sait que \mathbf{u} est bijectif.

2) Montrons que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(\text{GL}(E), \circ)$.

- D'après la question précédente, $\mathcal{O}(E) \subset \text{GL}(E)$ et d'autre part, $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{O}(E))^2$. Pour tout x de E

$$\|\mathbf{v} \circ \mathbf{u}(x)\| = \|\mathbf{v}(\mathbf{u}(x))\| = \|\mathbf{u}(x)\| = \|x\|.$$

Donc $\mathbf{v} \circ \mathbf{u} \in \mathcal{O}(E)$.

- Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(E)$. Pour tout x de E

$$\|\mathbf{u}^{-1}(x)\| = \|\mathbf{u}(\mathbf{u}^{-1}(x))\| = \|x\|.$$

Donc $\mathbf{u}^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

On a montré que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(\text{GL}(E), \circ)$. En particulier, $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.

3) \Rightarrow /. Supposons que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(E)$. Donc \mathbf{u} conserve le produit scalaire. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Mais alors

$$(\mathbf{u}(e_i) | \mathbf{u}(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{symbole de KRONECKER}).$$

Ceci montre que $(\mathbf{u}(e_1), \mathbf{u}(e_2), \dots, \mathbf{u}(e_n))$ est une famille orthonormée de E . On sait qu'une telle famille est libre. Puisque d'autre part, $\text{card}(\mathbf{u}(e_i))_{1 \leq i \leq n} = n = \dim(E) < +\infty$, la famille $(\mathbf{u}(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

\Leftarrow /. Supposons que $(\mathbf{u}(e_1), \mathbf{u}(e_2), \dots, \mathbf{u}(e_n))$ soit une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}(e_i) \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{car la base } (\mathbf{u}(e_1), \dots, \mathbf{u}(e_n)) \text{ est orthonormée}) \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \quad (\text{car la base } (e_1, \dots, e_n) \text{ est orthonormée}) \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(E)$.

On a montré que : $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(E) \iff (\mathbf{u}(e_1), \mathbf{u}(e_2), \dots, \mathbf{u}(e_n))$ est une base orthonormée de E .

EXERCICE 79

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Supposons $h \neq 0$. Il existe donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $h(x_0) > 0$. Puisque h est continue en x_0 , il existe deux réels u et v tels que $u < v$ et $x_0 \in [u, v]$ et $\forall x \in [u, v]$,

$$h(x) \geq h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} = \frac{h(x_0)}{2}.$$

Puisque h est positive, on en déduit que

$$\int_a^b h(x) dx = \int_{[u,v]} h(x) dx + \int_{[a,b] \setminus [u,v]} h(x) dx \geq (v-u) \frac{h(x_0)}{2} + 0 = (v-u) \frac{h(x_0)}{2} > 0.$$

Ainsi, $h \neq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \neq 0$. Par contraposition, on a montré que $\int_a^b h(x) dx = 0 \Rightarrow h = 0$.

2) • Soit $(f, g) \in E^2$. Alors la fonction $f \times g$ est continue sur le segment $[a, b]$. Donc $\int_a^b f(x)g(x) dx$ existe. Ainsi, $(\cdot | \cdot)$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} .

• Soit $(f, g) \in E^2$. $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = (g|f)$. Donc, $(\cdot | \cdot)$ est symétrique.

• Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégration,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2 | g) = \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) g(x) dx = \lambda \int_a^b f_1(x)g(x) dx + \mu \int_a^b f_2(x)g(x) dx = \lambda (f_1 | g) + \mu (f_2 | g).$$

Donc, $(\cdot | \cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable. Par symétrie, $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique.

• Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégration, $(f|f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$. Donc $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

De plus,

$$\begin{aligned} (f|f) = 0 &\Rightarrow \int_a^b f^2(x) dx = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [a, b], f^2(x) = 0 \text{ (fonction continue positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Donc $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On a montré que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

3) D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx &= \left| \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx} \times \sqrt{\int_0^1 (e^{-x})^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1} \times \sqrt{\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{2e}. \end{aligned}$$

Donc, $0 \leq \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx \leq \frac{\sqrt{e^2-1}}{2e} = 0,46\dots$

EXERCICE 80

1) Le produit de deux fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodique est une fonction continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique. Donc E est stable pour la multiplication des fonctions.

• Soit $(f, g) \in E^2$. Alors la fonction $f \times g$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. Donc $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ existe. Ainsi, $(\cdot | \cdot)$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} .

• Soit $(f, g) \in E^2$. $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)f(x) dx = (g|f)$. Donc, $(\cdot | \cdot)$ est symétrique.

• Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégration,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2 | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) g(x) dx = \lambda \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) g(x) dx + \mu \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) g(x) dx = \lambda (f_1 | g) + \mu (f_2 | g).$$

Donc, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable. Par symétrie, $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique.

• Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégration, $(f | f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \geq 0$. Donc $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique positive. De plus,

$$\begin{aligned} (f | f) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [0, 2\pi], f^2(x) = 0 \text{ (fonction continue positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow f = 0 \text{ (car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique)}. \end{aligned}$$

Donc $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On a montré que $(|)$ est un produit scalaire sur E .

2) Pour tout réel x , $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = v(x) + w(x)$ où $v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} f(x)$ et $w(x) = \frac{1}{2}$. Déjà $v \in F$.

D'autre part, $(f, w) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$ et $(g, w) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = 0$ et donc $w \in (f, g)^\perp = F^\perp$.

On en déduit que le orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$ est la fonction $v : x \mapsto -\frac{1}{2} \cos 2x$.

EXERCICE 81

1) $\mathcal{F} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(I, R)$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ceci montre que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{F}^\perp \Leftrightarrow M \in (\text{Vect}(I, R))^\perp \Leftrightarrow M \in (I, R)^\perp \Leftrightarrow \varphi(I, M) = \varphi(R, M) = 0.$$

• $\varphi(I, M) = \text{Tr}({}^tIM) = \text{Tr}(M) = a + d$.

• ${}^tRM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -d \\ a & c \end{pmatrix}$. Donc $\varphi(R, M) = -b + c$.

Par suite,

$$M \in \mathcal{F}^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ c = b \end{cases}.$$

Ainsi, $\mathcal{F}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(S, T)$ où $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, la famille (S, T) est clairement libre et donc une base de \mathcal{F}^\perp est (S, T) où $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) 1ère solution. $J = I + T$ avec $I \in \mathcal{F}$ et $T \in \mathcal{F}^\perp$. Donc le projeté orthogonal de J sur \mathcal{F}^\perp est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2ème solution. Déterminons l'orthonormalisée de la famille libre (S, T) . On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire φ .

• ${}^tST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\varphi(S, T) = 0$. La famille (S, T) est déjà une famille orthogonale.

• $S = \text{diag}(1, -1)$ puis ${}^tSS = S^2 = I$. Donc $\|S\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tSS)} = \sqrt{2}$.

- ${}^t\mathbb{T} = \mathbb{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Donc $\|\mathbb{T}\| = \sqrt{\text{Tr}({}^t\mathbb{T})} = \sqrt{2}$.

Une base orthonormale de \mathcal{F}^\perp est (S_0, T_0) où $S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp est la matrice

$$K = \varphi(S_0, J) S_0 + \varphi(T_0, J) T_0.$$

- ${}^tS_0 J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\varphi(S_0, J) = \text{Tr}({}^tS_0 J) = 0$.

- ${}^tT_0 J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\varphi(T_0, J) = \text{Tr}({}^tT_0 J) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$.

Mais alors $K = \varphi(S_0, J) S_0 + \varphi(T_0, J) T_0 = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{T}$.

La projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp est la matrice $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) On sait que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\| = \|\mathbb{T}\| = \sqrt{\text{Tr}({}^t\mathbb{T})}$ avec ${}^t\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}.$

EXERCICE 82

1) **1ère solution.** $(. | .)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en particulier, $(. | .)$ est un produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2ème solution.

- $(. | .)$ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

- Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd' = a'a + b'b + c'c + d'd = (A'|A).$$

Donc $(. | .)$ est symétrique.

- Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $A'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ trois éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu A'|A'') &= (\lambda a + \mu a') a'' + (\lambda b + \mu b') b'' + (\lambda c + \mu c') c'' + (\lambda d + \mu d') d'' \\ &= \lambda(aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + \mu(a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') \\ &= \lambda(A|A'') + \mu(A'|A''). \end{aligned}$$

Donc $(. | .)$ est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie, $(. | .)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0.$$

Donc $(. | .)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$(A|A) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Finalement, $(. | .)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou encore $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Notons \mathcal{T}_s l'espace des matrices triangulaires supérieures.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_s$ et bien sûr $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_s^\perp$. En effet, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le produit scalaire de A et de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 + 0 \times (-1)$ c'est-à-dire 0.

On sait que

$$d(A, \mathcal{T}_s) = \|A - B\| = \|C\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1.$$

La distance de A au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures est égale à 1.

EXERCICE 84

1) Soit z un nombre complexe non nul. Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

2) Soit z un nombre complexe. $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Posons donc $z = e^{i\theta}$ où θ est un réel.

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \text{ (d'après la formule de MOIVRE)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La division euclidienne de k par n s'écrit $k = qn + r$ où q et r sont deux entiers relatifs tels que $0 \leq r < n$. On a alors

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(qn+r)\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n} + 2iq\pi} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}.$$

Ainsi, l'équation $z^n = 1$ admet pour solutions les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Enfin, l'application $\begin{matrix} [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$ est

injective et, puisque pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$, les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont deux à deux distincts.

On a montré que l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions deux à deux distinctes à savoir les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

3) Montrons que les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ sont réelles.

Soient A , B et M les points d'affixes respectives $-i$, i et z .

$$\begin{aligned} (z+i)^n = (z-i)^n &\Rightarrow |(z+i)^n| = |(z-i)^n| \Rightarrow |z+i|^n = |z-i|^n \Rightarrow |z+i| = |z-i| \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}([AB]) \Rightarrow M \in (Ox) \\ &\Rightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Réolvons alors l'équation proposée. Puisque le nombre i n'est pas solution de l'équation

$$\begin{aligned} (z+i)^n = (z-i)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

- Si $k=0$, $z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \Leftrightarrow 0 \times z = -2i$. Cette équation n'a pas de solution.
- Si $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) &\Leftrightarrow z = \frac{-i \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \Leftrightarrow z = \frac{-ie^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-i \times 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow z = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ sont les nombres de la forme $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $1 \leq k \leq n - 1$. Ce sont effectivement des réels.

EXERCICE 85

1) (a) D'après la formule de TAYLOR, la décomposition de $P(x)$ dans la base

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

(b) Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la formule de TAYLOR,

$$P = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k + (X - a)^r \sum_{k=r}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-r}.$$

Puisque $\deg\left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k\right) \leq r - 1$, $R = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$ est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^r$. Par suite,

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre au moins } r &\Leftrightarrow (X - a)^r | P \Leftrightarrow R = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0. \end{aligned}$$

car la famille $(1, X - a), \dots, (X - a)^{r-1}$ est libre. Ensuite

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre } r \text{ exactement} &\Leftrightarrow a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre au moins } r \text{ et pas d'ordre au moins } r + 1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } \overline{\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 \text{ racine double de } X^5 + aX^2 + bX &\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P''(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe un et un seul polynôme P solution à savoir le polynôme $P = X^5 - 4X^2 + 3X$. De plus

$$P = X(X - 1)(X^3 + X^2 + X - 3) = X(X - 1)^2(X^2 + 2X + 3).$$

Le discriminant réduit du trinôme $X^2 + 2X + 3$ est égal à $-2 < 0$. Donc la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est $P = X(X - 1)^2(X^2 + 2X + 3)$.

EXERCICE 86

1) (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $\text{PGCD}(p, a) = 1$ et $\text{PGCD}(p, b) = 1$.

D'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $pu_1 + av_1 = 1$ et $pu_2 + bv_2 = 1$. En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient $(pu_1 + av_1)(pu_2 + bv_2) = 1$ puis

$$p(pu_1u_2 + av_1u_2 + bu_1v_2) + ab(v_1v_2) = 1.$$

Puisque $pu_1u_2 + av_1u_2 + bu_1v_2$ et v_1v_2 sont des entiers relatifs, le théorème de BÉZOUT montre que $\text{PGCD}(p, ab) = 1$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. $\binom{p}{k} k! = \overbrace{p(p-1)\dots(p-k+1)}^{k \text{ facteurs}} \in p\mathbb{Z}$. Ainsi, p divise $\binom{p}{k} k!$.

Maintenant, puisque p est premier, p est premier à $2, 3, \dots, k$. D'après la question précédente, p est premier à $k!$.

Ainsi, p divise $\binom{p}{k} k!$ et p est premier à $k!$. D'après le théorème de GAUSS, p divise $\binom{p}{k}$.

On a montré que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.

2) (a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

• $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $n^p \equiv n \pmod{p}$ et montrons que $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\begin{aligned} (n+1)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k \\ &\equiv 1 + n^p \pmod{p} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\equiv n+1 \pmod{p} \text{ (par hypothèse de récurrence)}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que p ne divise pas n . Puisque p est un nombre premier, on en déduit que $\text{PGCD}(p, n) = 1$.

D'après la question précédente, p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$. Puisque p est premier à n , le théorème de GAUSS permet d'affirmer que p divise $n^{p-1} - 1$ ou encore que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, p \text{ ne divise pas } n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

EXERCICE 87

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.
 $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$

• φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers \mathbb{R}^{n+1} .

• Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$.

Le polynôme P a au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes et est de degré inférieur ou égal à n . On sait alors que $P = 0$. Par suite, φ est une application linéaire injective.

• Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) < +\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Mais alors, pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ ou encore il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg(P) \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puisque $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}, L_k(a_i) = 0$ et que les a_i sont deux à deux distincts, L_k est divisible par $\prod_{i \neq k} (X - a_i)$. Puisque $\deg(L_k) \leq n$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$L_k = \lambda \prod_{i \neq k} (X - a_i).$$

La condition $L_k(a_k) = 1$ fournit $\lambda = \frac{1}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)}$ et donc

$$L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

3) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. $\sum_{k=0}^p a_k^p L_k$ et X^p sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=0}^p a_k^p L_k(a_i) = \sum_{k=0}^p a_k^p \delta_{i,k} = a_i^p.$$

Ainsi, $\varphi\left(\sum_{k=0}^p a_k^p L_k\right) = \varphi(X^p)$. Puisque φ est injective, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^p a_k^p L_k = X^p.$$

EXERCICE 88

1)

$$\begin{aligned} 1 \text{ racine d'ordre au moins } 2 \text{ de } P &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = n \text{ et } b = -(n+1) \text{ (fourni par les formules de CRAMER)}. \end{aligned}$$

Il existe un et un seul polynôme solution à savoir le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

2) On sait que $\sum_{k=0}^n X^k = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$. En dérivant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1} - 1)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Par suite,

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k.$$

EXERCICE 89

1) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$z^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

De plus, $0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{k\pi}{n} \leq \frac{(n-1)\pi}{n} < \pi$ et donc $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |z^k - 1| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \arg(z^k - 1) = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

2)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= 2\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \quad (\text{car } e^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1) \\
&= 2\operatorname{Im}\left(\frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}})}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) \\
&= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \operatorname{Im}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

$$S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

EXERCICE 90

1) • Soient $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1), (\lambda P + \mu Q)(a_2), (\lambda P + \mu Q)(a_3)) \\
&= \lambda(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) + \mu(Q(a_1), Q(a_2), Q(a_3)) \\
&= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).
\end{aligned}$$

Donc Φ est une application linéaire.

• Soit $P \in \operatorname{Ker}\Phi$. Donc, P s'annule en a_1, a_2 et a_3 . Ainsi, P est un polynôme de degré au plus 2 ayant au moins trois racines deux à deux distinctes. On sait alors que $P = 0$.

Par suite, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$ et donc Φ est injectif.

• Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3) < +\infty$ et puisque Φ est une application linéaire injective de $(\mathbb{K}_2[X])$ dans \mathbb{K}^3 , on sait que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) (a) $(L_1, L_2, L_3) = (\Phi^{-1}(e_1), \Phi^{-1}(e_2), \Phi^{-1}(e_3))$. Donc la famille (L_1, L_2, L_3) est l'image de la base (e_1, e_2, e_3) par l'isomorphisme Φ^{-1} . Puisque l'image d'une base par un isomorphisme est une base, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Par définition, $L_1(a_1) = 1$ et $L_1(a_2) = L_1(a_3) = 0$. Puisque a_2 et a_3 sont distincts, le polynôme L_2 est divisible par $(X - a_2)(X - a_3)$. Puisque $\deg(L_1) \leq 2$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = \lambda(X - a_2)(X - a_3)$. La condition $L_1(a_1) = 1$ fournit

$$\lambda = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \text{ et donc}$$

$$L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}.$$

En échangeant les rôles de a_1, a_2 et a_3 , on obtient

$$L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \text{ et } L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

3) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on a $L_j(a_i) = \delta_{i,j}$ (symbole de KRONECKER). Donc pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i.$$

Ainsi,

$$\forall P \in \mathbb{K}_2[X], P = P(a_1) L_1 + P(a_2) L_2 + P(a_3) L_3.$$

4) Application :

$$\begin{aligned} P &= 1 \times \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 3 \times \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 1 \times \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= \frac{1}{2} ((X-1)(X-2) - 6X(X-2) + X(X-1)) = -2X^2 + 4X + 1. \end{aligned}$$

$$P = -2X^2 + 4X + 1.$$

EXERCICE 95

1) **Théorème de BÉZOUT dans \mathbb{Z} .** Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. $\text{PGCD}(a, b) = 1 \iff \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$.

2) **1ère solution.** Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Alors $\text{PPCM}(a, b) = ab$ puis

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff c \text{ multiple commun à } a \text{ et } b \iff c \text{ multiple de } \text{PPCM}(a, b) \iff c \text{ multiple de } ab \iff ab \mid c.$$

2ème solution. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

- Si $ab \mid c$, alors $a \mid ab$ et $ab \mid c$. Par transitivité de \mid , $a \mid c$. De même, $b \mid c$.
- Supposons que $a \mid c$ et $b \mid c$. Donc, il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $c = ka$ et $c = k'b$. D'autre part, a et b sont premiers entre eux et donc, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On multiplie les deux membres de cette égalité par c et on obtient

$$c = acu + bcv = ak'bu + bkav = ab(k'u + kv).$$

Puisque $k'u + kv$ est un entier relatif, ceci montre que ab divise c . Finalement

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c.$$

3) (a) **1ère solution.** Puisque $11 + 6 \equiv 0 \pmod{17}$ et $11 + 4 \equiv 0 \pmod{15}$, on a $-11 \equiv 6 \pmod{17}$ et $-11 \equiv 4 \pmod{15}$. Une solution particulière x_0 de (S) dans \mathbb{Z} est $x_0 = -11$.

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases} \iff \exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{cases} \iff \exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} x = 6 + 17k \\ -17k + 15k' = 2 \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation $-17k + 15k' = 2$ est le couple $(-1, -1)$, un tel couple pouvant dans le cas général être obtenu par l'algorithme d'EUCLIDE. Une solution particulière du système est alors $x_0 = 6 + 17 \times (-1) = -11$.

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. $15 = 3 \times 5$ et 17 sont deux entiers premiers entre eux.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases} &\iff \begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{17} \\ x \equiv x_0 \pmod{15} \end{cases} \iff 15 \mid x - x_0 \text{ et } 17 \mid x - x_0 \\ &\iff 15 \times 17 \mid x - x_0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = -11 + 255k. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{-11 + 255k, k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, k \in \mathbb{Z}\}.$$