

Planche n° 36. Produit scalaire : corrigé

Exercice n° 1

Montrons que $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A \times B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- φ est symétrique. En effet, pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^t A \times B) = \text{Tr}({}^t ({}^t A \times B)) = \text{Tr}({}^t B \times A) = \varphi(B, A).$$

- φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition.

- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.

Finalement, φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme).

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2 \right) = N(A)^2 N(B)^2, \end{aligned}$$

et donc, $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice n° 2

1) Soit $(x, y, z) \in E^3$.

$$\begin{aligned} f(x+z, y) + f(x-z, y) &= \frac{1}{4} (\|x+z+y\|^2 + \|x-z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2 - \|x-z-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (2(\|x+y\|^2 + \|z\|^2) - 2(\|x-y\|^2 + \|z\|^2)) \quad (\text{puisque } N \text{ vérifie l'identité du parallélogramme}) \\ &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2f(x, y). \end{aligned}$$

2) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$2f(x, y) = f(x+x, y) + f(x-x, y) = f(2x, y) + f(0, y)$$

mais $f(0, y) = \frac{1}{4} (\|y\|^2 - \|-y\|^2) = 0$ (définition d'une norme) et donc $f(2x, y) = 2f(x, y)$.

3) Soit $(x, y) \in E^2$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx, y) = nf(x, y)$.

- L'égalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x, y) + f(nx, y) = f((n+1)x+x, y) + f((n+1)x-x, y) = 2f((n+1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x, y) = 2f((n+1)x, y) - f(nx, y) = 2(n+1)f(x, y) - nf(x, y) = (n+2)f(x, y).$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx, y) = nf(x, y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x, y) = f\left(\frac{1}{n}x, y\right) = nf\left(\frac{1}{n}x, y\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}f(x, y)$.

Puis, si $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(rx, y) = \frac{1}{q}f(px, y) = p\frac{1}{q}f(x, y) = rf(x, y)$$

et pour tout rationnel positif r , $f(rx, y) = rf(x, y)$.

Enfin, si $r \leq 0$, $f(rx, y) + f(-rx, y) = 2f(0, y) = 0$ (d'après 1)) et donc $f(-rx, y) = -f(rx, y) = rf(x, y)$.

4) On pose $x = \frac{1}{2}(u + v)$ et $y = \frac{1}{2}(u - v)$.

$$f(u, w) + f(v, w) = f(x + y, w) + f(x - y, w) = 2f(x, w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u + v), w\right) = f(u + v, w).$$

5) f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable. Donc f est bilinéaire.

6) f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x \in E$, $f(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 + \|x - x\|^2) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $\| \cdot \|$ est la norme associée. $\| \cdot \|$ est donc une norme euclidienne.

Exercice n° 3

La famille (V_1, V_2) est libre et donc est une base de F . Son orthonormalisée (e_1, e_2) est une base orthonormée de F .

$$\|V_1\| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7} \text{ et}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1).$$

$$(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1) = \frac{4}{\sqrt{7}} \text{ puis } V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{4}{7}(1, 2, -1, 1) = \frac{1}{7}(-4, 13, 11, -11) \text{ puis}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11).$$

Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in F^\perp \Leftrightarrow u \in (\text{Vect}(V_1, V_2))^\perp \Leftrightarrow u \in (V_1, V_2)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} u|V_1 = 0 \\ u|V_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Exercice n° 4

1) a) Soit $u \in E$. L'application $x \mapsto u|x$ est une forme linéaire sur E par linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable.

b) Soit φ une forme linéaire sur E .

Existence. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $a_i = \varphi(e_i)$ puis $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ &= u|x \text{ (car la base } \mathcal{B} \text{ est orthonormée.)} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un vecteur $u \in E$ (indépendant de $x \in E$) tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = u|x$.

Unicité. Soit $v \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = v|x$. Par suite, $\forall x \in E$, $u|x = v|x$ puis, $\forall x \in E$, $(u - v)|x = 0$. Mais alors $u - v \in E^\perp = \{0\}$ puis $u = v$. Ceci montre l'unicité du vecteur u .

2) a) L'application $(P, Q) \mapsto P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie sur \mathbb{R} . L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur E . D'après la question 1), il existe un élément A de

$\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = A|P$ ou encore il existe un élément A de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 A(t)P(t) dt = P(0)$.

b) Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$.

Le choix de $P = 1$ montre que $A \neq 0$. Le choix $P = XA$ fournit : $0 = P(0) = \int_0^1 tA^2(t) dt$.

Mais alors, $\forall t \in [0, 1]$, $tA^2(t) = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $\forall t \in]0, 1]$, $A(t) = 0$ et donc $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). Ceci est une contradiction et donc il n'existe pas de polynôme A tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 A(t)P(t) dt = P(0)$.

Exercice n° 5

1) Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ (M est une matrice de format (p, n)).

Puisque \mathcal{B} est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$.

Donc, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, ${}^t C_i C_j = x_i|x_j$ ou encore $G = {}^t M \times M$.

Il s'agit alors de montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M M)$. Ceci provient du fait que M et ${}^t M \times M$ ont même noyau. En effet, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \text{Ker} M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^t M \times MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^t M M)$$

et

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}({}^t M M) &\Rightarrow {}^t M M X = 0 \Rightarrow {}^t X {}^t M M X = 0 \Rightarrow {}^t (M X) M X = 0 \Rightarrow \|M X\|^2 = 0 \Rightarrow M X = 0 \\ &\Rightarrow X \in \text{Ker} M. \end{aligned}$$

On a montré que $\text{Ker}({}^t M M) = \text{Ker}(M)$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}({}^t M M) = \text{rg}(M)$.

2) Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n) < n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n , $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G) = 0$.

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, (x_1, \dots, x_n) engendre un espace F de dimension n . Soient \mathcal{B} une base orthonormée de F et M la matrice de la famille (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} . D'après 1), on a $G = {}^t M M$ et d'autre part, M est une matrice carrée, inversible car matrice d'une base de F dans une base de F . Par suite,

$$\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det({}^t M M) = \det({}^t M) \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3) On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x))|x_1 \\ (x - p_F(x) + p_F(x))|x_2 \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x))|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, \dots, x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

Exercice n° 6

Un vecteur engendrant D est $\vec{u} = (2, 1, 3)$. Pour $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} p_D(\vec{v}) &= \frac{(x, y, z)|(2, 1, 3)}{\|(2, 1, 3)\|^2} (2, 1, 3) = \frac{2x + y + 3z}{14} (2, 1, 3) \\ &= \left(\frac{4x + 2y + 6z}{14}, \frac{2x + y + 3z}{14}, \frac{6x + 3y + 9z}{14} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ puis $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = 2P - I = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a, b, c) dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 7

Si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls.

Si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre et donc une base de E , considérons $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| \times |\det_{\mathcal{B}'}(e_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}|,$$

car $\det_{\mathcal{B}'}(e_i)$ est le déterminant d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1 .

Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans \mathcal{B}' est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i |e_i|$ (puisque \mathcal{B}' est orthonormée). Donc :

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = \left| \prod_{i=1}^n (x_i |e_i|) \right| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^n \|x_i\|,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i , $|x_i| |e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i , x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale.

Exercice n° 8

1ère solution.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + ab = \frac{1}{3}(a^2 + a(3b - 1)) + b^2 - \frac{2}{5}b + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b - 1) \right)^2 - \frac{1}{12}(3b - 1)^2 + b^2 - \frac{2}{5}b + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b - 1) \right)^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{10}b + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b - 1) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{4}{225} \geq \frac{4}{225}, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a + \frac{1}{2}(3b - 1) = b + \frac{1}{5} = 0$ ou encore $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{4}{5}$.

$\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ est minimum pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = -\frac{1}{5}$ et ce minimum vaut $\frac{4}{225}$.

2ème solution.

$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX + b$.

On doit calculer $\text{Inf} \left\{ \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F = \mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX + b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F .

Trouvons une base orthonormale de F . L'orthonormalisée (P_0, P_1) de $(1, X)$ convient.

$\|1\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$ et $P_0 = 1$. Puis $X - (X|P_0)P_0 = X - \int_0^1 t dt = X - \frac{1}{2}$, et comme

$$\|X - (X|P_0)P_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

on a $P_1 = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0 + (X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0) = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$ et

$$(X^4|P_1) = \sqrt{3} \int_0^1 t^4(2t - 1) dt = \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{15}.$$

Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est

$$\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{15} \sqrt{3}(2X - 1) = \frac{1}{5}(4X - 1).$$

Le minimum cherché est alors $\int_0^1 \left(t^4 - \frac{1}{5}(4t - 1)\right)^2 dt = \dots = \frac{4}{225}$.

Exercice n° 9

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. φ est clairement linéaire et $\text{Ker}\varphi$ est $(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$.

$$x \mapsto (x|e_1, \dots, x|e_n)$$

Comme E et \mathbb{R}^n ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x|e_i = a_i$.

Exercice n° 10

1ère solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E$ que, si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est obtusangle, $p \leq n + 1$.

- Pour $n = 1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 vérifiant $x_1|x_2 < 0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3|x_1 = 0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1|x_3 > 0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2|x_3 > 0$). Donc $p \leq 2$.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n + 1$. Si $p = 1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p \geq 2$. x_p n'est pas nul et $H = x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n .

Pour $1 \leq i \leq p - 1$, notons $y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H .

Vérifions que la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est une famille obtusangle de H . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

$$y_i|y_j = x_i|x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{\|x_p\|^4} = x_i|x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p - 1 \leq 1 + \dim H = n + 1$ et donc $p \leq n + 2$.

2ème solution. Montrons que si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$ (*).

Quitte à multiplier les deux membres de (*) par -1 , on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i > 0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i > 0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \leq 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints.

(*) s'écrit $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = - \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0 \leq \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) | \left(- \sum_{i \in J} \lambda_i x_i \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i (-\lambda_j) x_i|x_j \leq 0.$$

Donc, $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0$ puis $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$.

Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p , on obtient $(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i)|x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i|x_p) < 0$ ce qui est une contradiction.

Puisque la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est libre, son cardinal $p - 1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p \leq n + 1$.

Exercice n° 11

L'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E . Pour cela, déterminons (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2, X^3)$.

- $\|P_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2$ et on prend $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt = 0$ puis $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 = X$ puis $\|P_1 - (P_1|Q_0)Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$.

- $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1 = 0$. Donc, $P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$,

puis $\|P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$.

- Enfin, $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 - (P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$,

puis $\left\|X^3 - \frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, et $P_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$.

Une base orthonormée de E est (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$ et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$.

Soit alors P un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$. Posons $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$.

Puisque (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base orthonormée de E , $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = \|P\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Maintenant, pour $x \in [-1, 1]$, en posant $M_i = \text{Max}\{|Q_i(x)|, x \in [-1, 1]\}$, on a :

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq |a| \times |Q_0(x)| + |b| \times |Q_1(x)| + |c| \times |Q_2(x)| + |d| \times |Q_3(x)| \leq |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}. \end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leq 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$.

Etudions les cas d'égalité. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$.

Soit $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} = |P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} = |P(x_0)| &\leq |a| \times |Q_0(x_0)| + |b| \times |Q_1(x_0)| + |c| \times |Q_2(x_0)| + |d| \times |Q_3(x_0)| \leq |a| \times M_0 + |b| \times M_1 + |c| \times M_2 + |d| \times M_3 \\ &\leq \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|, |b|, |c|, |d|)$ est colinéaire à $(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda (\pm Q_0 \pm \sqrt{3}Q_1 \pm \sqrt{5}Q_2 \pm \sqrt{7}Q_3)$

où $\lambda^2(1 + 3 + 5 + 7) = 1$ et donc $\lambda = \pm \frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0 \in \{-1, 1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1) + bQ_1(1) + cQ_2(1) + dQ_3(1)| = |a|Q_0(1) + |b|Q_1(1) + |c|Q_2(1) + |d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{4} (Q_0 + \sqrt{3}Q_1 + \sqrt{5}Q_2 + \sqrt{7}Q_3) &= \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 + 3X + \frac{5}{2}(3X^2 - 1) + \frac{7}{2}(5X^3 - 3X)\right) \\ &= \pm \frac{1}{8\sqrt{2}} (35X^3 + 15X^2 - 15X - 3) \end{aligned}$$

Exercice n° 12

L'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t) dt \int_0^1 f^{n+2}(t) dt = \int_0^1 \left(\sqrt{f(t)}^n\right)^2 dt \int_0^1 \left(\sqrt{f(t)}^{n+2}\right)^2 dt \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}^n \sqrt{f(t)}^{n+2} dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt\right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Comme f est continue et strictement positive sur $[0, 1]$, I_n est strictement positif pour tout entier naturel n . Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$. La suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ est définie et croissante.

Exercice n° 13

1) La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E , nous allons vérifier que

- a) $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p)$,
- b) $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est orthonormale,
- c) $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_p|X^p > 0$.

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, (L_0, L_1, \dots, L_p) est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p)$.

Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p . Si $p \geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p)} P(t) dt = \left[((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2 - 1)^p$ et donc d'ordre $p - k$ de $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p - 1$.

En réitérant, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t) dt$ et pour $k = p$, on obtient enfin

$$L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p P^{(p)}(t) dt, \text{ cette formule restant vraie pour } p = 0.$$

Soient p et q deux entiers tels que $0 \leq q < p \leq n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p L_q^{(p)}(t) dt = 0$ car $q = \text{deg}(L_q) < p$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une famille orthogonale de $n + 1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p (t^p)^{(p)} dt = p! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^p dt > 0$. On a montré que la famille $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0, \dots, L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|L_p\|^2 &= L_p|L_p = L_p|\text{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp) \\ &= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^1 (1-t^2)^p dt = 2(2p)! \int_0^1 (1-t^2)^p dt \\ &= 2(2p)! \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 u)^p (-\sin u) du = 2(2p)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} u du \\ &= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (Intégrales de WALLIS)} \\ &= 2(2p)! \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \text{ (à revoir).} \\ &= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2. \end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} 2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2}{2p+1}} \frac{1}{2^p p!} ((X^2-1)^p)^{(p)} \right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).

Exercice n° 14

Par hypothèse, $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de F . De plus, f est un automorphisme et donc $\dim(f(F)) = \dim(F) < +\infty$. On en déduit que $f(F) = F$.

Vérifions que $f(F^\perp) \subset F^\perp$. Soit $x \in F^\perp$.

Soit $y \in F$. Puisque $F = f(F)$, il existe $x' \in F$ tel que $f(x') = y$. Puisque f est un automorphisme orthogonal,

$$f(x)|y = f(x)|f(x') = x|x' = 0.$$

Donc, $\forall y \in F$, $f(x)|y = 0$. On en déduit que $f(x) \in F^\perp$. Ainsi, $\forall x \in E$, $(x \in F^\perp \Rightarrow f(x) \in F^\perp)$ et donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Enfin, F^\perp est un sous-espace vectoriel de E , stable par f et le début de l'exercice permet d'affirmer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice n° 15

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Si λ et g existent, nécessairement on doit avoir

$$\|f(e_1)\| = \|\lambda g(e_1)\| = |\lambda| \times \|g(e_1)\| = \lambda.$$

Soit donc $\lambda = \|f(e_1)\|$. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

$$(e_i + e_1|e_i - e_1) = (e_i|e_i)^2 - (e_1|e_1)^2 = 1 - 1 = 0.$$

Par hypothèse, on en déduit que $(f(e_i + e_1)|f(e_i - e_1)) = 0$ ou encore $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_1)\|^2 = \lambda^2$ puis $\|f(e_i)\| = \lambda$. En résumé, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|f(e_i)\| = \lambda$.

1er cas. Si $\lambda = 0$, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|f(e_i)\| = 0$ puis $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = 0$. L'endomorphisme f s'annule sur une base de E et donc $f = 0$. Dans ce cas, on peut prendre $\lambda = 0 \in \mathbb{R}^+$ et $g = \text{Id} \in \mathcal{O}(E)$. On a bien $f = \lambda g$.

2ème cas. Sinon $\lambda > 0$. On pose alors $g = \frac{1}{\lambda} f$ de sorte que $f = \lambda g$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|g(e_i)\| = \frac{1}{\lambda} \|f(e_i)\| = 1$.

Ainsi, les vecteurs $g(e_1), \dots, g(e_n)$ sont unitaires et deux à deux orthogonaux (car f conserve l'orthogonalité). L'image par g de la base orthonormée \mathcal{B} est donc une base orthonormée de E . On en déduit que g est un automorphisme orthogonal. Encore une fois, on a fourni un réel positif λ et un automorphisme orthogonal g tel que $f = \lambda g$.

Exercice n° 16

1) • Supposons que p soit une projection orthogonale. Posons $F = \text{Im}(p)$ de sorte que $p = p_F$. On sait que $\text{Ker}(p) = F^\perp$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|p_F(x) + (x - p_F(x))\|^2 \\ &= \|p_F(x)\|^2 + \|(x - p_F(x))\|^2 \text{ (car } x - p_F(x) \in \text{Ker}(p) = F^\perp \text{ et d'après le théorème de PYTHAGORE)} \\ &\geq \|p_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

et donc $\|x\| \geq \|p_F(x)\|$.

• Supposons que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrons que p est une projection orthogonale. Posons $F = \text{im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$ (de sorte que p est la projection sur F parallèlement à G) et montrons que $G = F^\perp$. Soient $x \in F$ et $y \in G \setminus \{0\}$. Pour tout réel λ , on a

$$\|x\|^2 = \|p(x + \lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2,$$

et donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$. Le polynôme $\lambda \mapsto 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$ est un trinôme du second degré (car $\|y\|^2 > 0$) et est de signe constant sur \mathbb{R} . Son discriminant est réduit est donc négatif ou nul.

On en déduit que $(x|y)^2 \leq 0$ puis que $x|y = 0$. On a montré que tout vecteur de G est orthogonal à tout vecteur de F et donc que $G \subset F^\perp$. D'autre part, G et F^\perp sont deux supplémentaires de F . F et G ont donc mêmes dimensions finies. On en déduit que $G = F^\perp$ et donc que p est une projection orthogonale.

2) • Supposons que p soit une projection orthogonale. Puisque p est une projection, on a $p^2 = p$ et donc $P^2 = P$. Vérifions alors que P est une matrice symétrique.

Puisque \mathcal{B} est orthonormée, le coefficient ligne i , colonne j , $1 \leq i, j \leq n$ de P qui est la i -ème coordonnée de $p(e_j)$ dans \mathcal{B} est encore $(p(e_i)|e_j)$. Pour montrer que P est symétrique, on doit donc vérifier que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (p(e_i)|e_j) = (e_i|p(e_j))$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} (p(e_i)|e_j) &= (p(e_i)|p(e_j) + e_j - p(e_j)) = (p(e_i)|p(e_j)) + (p(e_i)|e_j - p(e_j)) \\ &= (p(e_i)|p(e_j)) \quad (\text{car } p(e_i) \in \text{Im}(p) \text{ et } e_j - p(e_j) \in \text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp). \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, on a aussi $(e_i|p(e_j)) = (p(e_i)|p(e_j))$ et finalement $(p(e_i)|e_j) = (e_i|p(e_j))$. On a montré que la matrice P est symétrique.

• Supposons que $P^2 = P$ et ${}^tP = P$ et montrons que p est une projection orthogonale. Puisque $P^2 = P$, on a $p^2 = p$ et donc p est une projection.

Vérifions que $\forall (x, y) \in E^2, p(x)|y = x|p(y)$. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux éléments de E .

$$\begin{aligned} p(x)|y &= \left(\sum_{i=1}^n x_i p(e_i) \right) \left| \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right. = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (p(e_i)|e_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (e_i|p(e_j)) \quad (\text{d'après plus haut}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \left| \left(\sum_{j=1}^n y_j p(e_j) \right) \right. \\ &= x|p(y). \end{aligned}$$

Montrons alors que tout élément de $\text{Im}(p) = F$ est orthogonal à tout élément de $\text{Ker}(p) = G$. Soient $x \in E$ et $y \in \text{Ker}(p)$.

$$p(x)|y = x|p(y) = x|0 = 0.$$

Ainsi, $\text{Im}(p) \subset (\text{Ker}(p))^\perp$ puis $\text{Im}(p) = (\text{Ker}(p))^\perp$ comme précédemment car $\text{Im}(p)$ et $(\text{Ker}(p))^\perp$ ont mêmes dimensions finies. On a montré que p est une projection orthogonale.

3)

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \forall (y, z) \in \text{Ker}(s - \text{Is}) \times \text{Ker}(s + \text{Id}), \|y - z\|^2 = \|y + z\|^2 \\ &\Leftrightarrow \forall (y, z) \in \text{Ker}(s - \text{Is}) \times \text{Ker}(s + \text{Id}), \|y\|^2 - 2(y|z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 + 2(y|z) + \|z\|^2 \\ &\Leftrightarrow \forall (y, z) \in \text{Ker}(s - \text{Is}) \times \text{Ker}(s + \text{Id}), y|z = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(s + \text{Id}) \subset (\text{Ker}(s - \text{Id}))^\perp. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $\text{Ker}(s + \text{Id})$ et $\text{Ker}(s - \text{Id})$ sont supplémentaires, comme à la question 1),

$$\text{Ker}(s + \text{Id}) \subset (\text{Ker}(s - \text{Id}))^\perp \Leftrightarrow \text{Ker}(s + \text{Id}) = (\text{Ker}(s - \text{Id}))^\perp \Leftrightarrow s \text{ symétrie orthogonale.}$$

4)

$$\begin{aligned}
s \text{ symétrie orthogonale} &\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(\text{Id} + s) \text{ projection orthogonale} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(\text{I}_n + S)\right)^2 = \frac{1}{2}(\text{I}_n + S) \text{ et } {}^t\left(\frac{1}{2}(\text{I}_n + S)\right) = \frac{1}{2}(\text{I}_n + S) \text{ (d'après 2)} \\
&\Leftrightarrow \text{I}_n + 2S + S^2 = 2\text{I}_n + 2S \text{ et } \text{I}_n + {}^tS = \text{I}_n + S \\
&\Leftrightarrow S^2 = \text{I}_n \text{ et } {}^tS = S.
\end{aligned}$$