Planche n° 35. Systèmes d'équations linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1

Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+mt=m-1 \\ 2x+y+mz+3t=1 \\ 3x+my+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{array}\right.$ **5)** $\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=m+2 \\ -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=-m \\ x-y-mz=m-4 \end{array}\right.$ **6)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{m} \end{array}\right.$

7) $\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1 \end{array}\right.$ **8)** $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=p \\ cx+ay+bz=q \\ bx+cy+az=r \end{array}\right.$

Exercice n° 2

Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. .$$

Exercice n° 3

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

Exercice n° 4

Résoudre le système : $x_1+x_2=0$, $x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$ pour $k=2,...,n-1$, $x_{n-1}+x_n=0$.

Exercice n° 5

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et $(f_1, f_2..., f_n)$ un n-uplet de fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1) la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre ;
2) il existe n éléments a_1, a_2,..., a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$.

Exercice n° 6

Déterminer l'inverse de $A=(a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1}=a_{i,i-1}=1$ et $a_{i,j}=0$ sinon.

Exercice n° 7

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes a_i+b_j soient toutes non nulles. Résoudre le système $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_i+b_j}$, pour tout $i=1,...,n$ (en utilisant la décomposition en éléments simples de $R=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X+b_j}$).

Exercice n° 8

1) Pour $a\in\mathbb{C}$, on pose $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_a(x)=e^{ax}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que la famille de fonctions $(f_{a_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

2) Soient $q_1, \ldots, q_p$ p nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que la famille de suites $\left((q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est libre.

