

## Planche n° 35. Systèmes d'équations linéaires : corrigé

### Exercice n° 1

$m, a, b, \dots$  sont des paramètres réels. On note (S) le système proposé et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de (S).

1)  $\det(S) = 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$ . Le système est de CRAMER si et seulement si  $m \in \{1, 6\}$ .

• Si  $m \notin \{1, 6\}$ , les formules de CRAMER fournissent alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2 - 5m - 6) - 5(3m - 18) - 7(m - 6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1} \\ y &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m-39) + (4m-27) + 21}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1} \\ z &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15) + 9 + 7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1} \end{aligned}$$

Si  $m \notin \{1, 6\}$ ,  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, -\frac{7}{m-1} \right) \right\}$ .

• Si  $m \in \{1, 6\}$ ,  $\det(S) = 0$ . Un déterminant principal est  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ . On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et  $x$  et  $z$  comme inconnues principales. Le système des deux premières équations s'écrit

$$\begin{cases} 2x + z = 4 - 3y \\ -x + 2z = 5 - my \end{cases} \text{ et équivaut à } \begin{cases} x = \frac{3 + (m-6)y}{5} \\ z = \frac{14 - (2m+3)y}{5} \end{cases}.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en  $y$  disparaissent si  $m \in \{1, 6\}$ ).

$$\begin{aligned} 7x + 3y + (m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7 \frac{3 + (m-6)y}{5} + 3y + (m-5) \frac{14 - (2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) - 35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si  $m = 1$ , le système n'a pas de solution et si  $m = 6$ , l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$ .

2)  $\det(S) = 2(-8m-4+2) - (4m+1) + 5(2m+2m+1) = 0$ . Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ . On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et  $x$  et  $z$  comme

inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à  $\begin{cases} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{cases}$ . La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$\begin{aligned} 5x - y + 4z = 3m - 2 &\Leftrightarrow 5 \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4 \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m - 2 \\ &\Leftrightarrow 5(6m-4) + 4(-3m+8) - 3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Si  $m \neq -2$ , le système n'a pas de solution. Si  $m = -2$ , l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$ .

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m = -2m(m-1)$ . Le système est de CRAMER en  $x, y$  et  $z$  si et seulement si  $m \notin \{0, 1\}$ .

• Si  $m \notin \{0, 1\}$ , les formules de CRAMER fournissent :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1 \\
 y &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)t + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1 \\
 z &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S} = \left\{ \left( -t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$ .

- Si  $m = 0$ , le système s'écrit  $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+z=2 \\ y+t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x \\ t=-1-y \\ 1=3 \end{cases}$ . Dans ce cas, le système n'a pas de solution.
- Si  $m = 1$ , le système s'écrit  $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+y+z-t=3 \\ x-y-z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x=1 \\ z=2-y \end{cases}$ . Dans ce cas, l'ensemble de solutions est  $\{(1, y, 2-y, 0), y \in \mathbb{R}\}$ .

4)

$$\begin{aligned}
 \det(S) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \\
 &= (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} \quad (\forall i \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, L_i \leftarrow L_i - L_1) \\
 &= (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
 &= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
 &= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-4)(m+6).
 \end{aligned}$$

Le système est de CRAMER si et seulement si  $m \notin \{0, 2, 4, -6\}$ . Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 m(m-2)(m-4)(m+6)x &= \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -[-3(5m-6) - (m-6)(-m^2+5m-3)] \\
 &= -m^3 + 11m^2 - 18m = -m(m-2)(m-9).
 \end{aligned}$$

$$\text{et } x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)y &= \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3) \\
&= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)
\end{aligned}$$

$$\text{et } y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6) = -2m^3+7m^2-6m \\
&= -m(2m-3)(m-2),
\end{aligned}$$

$$\text{et } z = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)t &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3) \\
&= m^4-m^3-17m^2+30m = m(m-2)(m^2+m-15)
\end{aligned}$$

$$\text{et } t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}.$$

• Si  $m = 0$ , le système s'écrit

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+2y+3z = -1 \\ 2x+y+3t = 1 \\ 3x+z+2t = 0 \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t = 0 \text{ (E}_1 + \text{E}_2) \\ 2x+y+3t = 1 \\ x+y+z+t = 0 \text{ (E}_3 + \text{E}_4) \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ -x-2y-3z = 1 \\ -x+2y+z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-2y \\ -x-2y-3(x-2y) = 1 \\ t = -x-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{4} \\ z = -x - \frac{1}{2} \\ t = -x + \frac{1}{4} \end{cases}.
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble de solutions :  $\mathcal{S} = \left\{ \left( x, x + \frac{1}{4}, -x - \frac{1}{2}, -x + \frac{1}{4} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$ .

- Si  $m = 2$ , on obtient pour ensemble de solutions :  $\left\{ \left( x, -x - \frac{5}{8}, x + \frac{1}{2}; -x - \frac{1}{8} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$ .
- Si  $m = 4$  ou  $m = -6$ , on voit en résolvant que le système est incompatible.

$$5) \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m) + (-m + 1) + (m + 1) = 2(m^2 + 1) \neq 0.$$

Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1}, y = 3 - m \text{ et } z = \frac{3m - 1}{m^2 + 1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$\begin{aligned} -m \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1} + 3 - m + m \frac{3m - 1}{m^2 + 1} &= -m \\ \Leftrightarrow -m(2m^2 - m - 1) + (3 - m)(m^2 + 1) + m(3m - 1) &= -m(m^2 + 1) \\ \Leftrightarrow -2m^3 + 7m^2 - m + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si  $m$  est l'une des trois racines de l'équation  $-2z^3 + 7z^2 - z + 3 = 0$ .

$$6) \det S = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\text{Van}(a, b, c)}{abc}.$$

Si  $a, b$  et  $c$  sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc}{mbc} \frac{\text{Van}(m, b, c)}{\text{Van}(a, b, c)} = \frac{a(b - m)(c - m)}{m(b - a)(c - a)},$$

$$\text{puis, par symétrie des rôles, } y = \frac{b(a - m)(c - m)}{m(a - b)(c - b)} \text{ et } z = \frac{c(a - m)(b - m)}{m(a - c)(b - c)}.$$

Si  $a = b \neq c$  (ou  $a = c \neq b$  ou  $b = c \neq a$ ), le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ ax + ay + cz = m \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ a(1 - z) + cz = m \\ \frac{1}{a}(1 - z) + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ z = \frac{m - a}{c - a} \\ \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \frac{m - a}{c - a} = \frac{1}{m} - \frac{1}{a} \end{cases}.$$

Le système est compatible si et seulement si  $(m - a)(m - c) = 0$  ou encore  $(m = a \text{ ou } m = c)$ . Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :  $\left\{ \left( x, \frac{m - c}{a - c} - x, \frac{m - a}{c - a} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$ .

Si  $a = b = c$ , le système s'écrit :  $x + y + z = 1 = \frac{m}{a} = \frac{a}{m}$ . Le système est compatible si et seulement si  $m = a = b = c$  et dans ce cas l'ensemble des solutions est :  $\{(x, y, 1 - x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

7)

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - (b + c)^2 & (a + c)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & b^2 - (a + c)^2 & (a + b)^2 - c^2 \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (a + b + c)^2 \begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a - b - c & a + c - b & 0 \\ 0 & b - a - c & a + b - c \end{vmatrix} = (a + b + c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a + c - b & 0 \\ -2(b - c) & b - a - c & a + b - c \end{vmatrix} \\ &= 2(a + b + c)^2 (c^2(-c(b - a - c) + (b - c)(a + c - b)) + (a + b - c)(bc(a + c - b) + b^2c)) \\ &= 2(a + b + c)^2 (c^2b(a - b + c) + (a + b - c)bc(a + c)) \\ &= 2bc(a + b + c)^2 (a^2 + ab + ac) = 2abc(a + b + c)^3. \end{aligned}$$

Si  $abc(a + b + c) \neq 0$ , le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2abc(a + b + c)}, y = \frac{(a - b - c)(a + b - c)}{2abc(a + b + c)} \text{ et } z = \frac{(a - b + c)(a - b - c)}{2abc(a + b + c)}.$$

Si  $a = 0$  (ou  $b = 0$  ou  $c = 0$ ), le système s'écrit :

$$\begin{cases} (b + c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ c^2(y + z) = 1 \\ b^2(y + z) = 1 \end{cases}.$$

Donc,

- Si  $((a = 0 \text{ et } b^2 \neq c^2) \text{ ou } (b = 0 \text{ et } a^2 \neq c^2) \text{ ou } (c = 0 \text{ et } a^2 \neq b^2))$ , le système n'a pas de solution.
- Si  $a = 0 \text{ et } b = c \neq 0$ , l'ensemble des solutions est  $\{(0, y, -\frac{y}{b^2}), y \in \mathbb{R}\}$  (résultats analogues pour les cas  $(b = 0 \text{ et } a = c \neq 0)$  et  $(c = 0 \text{ et } a = b \neq 0)$ ).
- Si  $a = b = c = 0$ , il n'y a pas de solution.
- Si  $a = 0 \text{ et } c = -b \neq 0$ , l'ensemble des solutions est  $\{(x, y - \frac{y}{b^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  (résultats analogues pour  $(b = 0 \text{ et } c = -a \neq 0)$  et  $(c = 0 \text{ et } b = -a \neq 0)$ ).
- Si  $abc \neq 0 \text{ et } a + b + c = 0$ , le système équivaut à l'équation  $a^2x + b^2y + c^2z = 1$ . L'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( x, y, \frac{1 - a^2x - b^2y}{c^2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

8)

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix} \\ &= (a + b + c)((a - b)(a - c) + (b - c)^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= (a + b + c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) \end{aligned}$$

Si  $\det S \neq 0$ , les formules de CRAMER fournissent :

$$x \det S = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2 - bc) + q(c^2 - ab) + r(b^2 - ac) \dots$$

### Exercice n° 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0$  et le système est de CRAMER en  $x_1, x_2$  et  $x_4$ . On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  de dimension  $5 - 3 = 2$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,  $F = \{(3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5), (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$  où  $e_1 = (3, -1, 1, 0, 0)$  et  $e_2 = (3, -2, 0, 0, 1)$  et, puisque  $\dim F = 2$ , une base de  $F$  est  $(e_1, e_2)$ .

### Exercice n° 3

Si  $z_k$  est l'affixe complexe de  $M_k$  et  $a_k$  est l'affixe complexe de  $A_k$ , le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$

$$= 1 - (-1)^n.$$

• Si  $n$  est impair,  $\det S = 2 \neq 0$  et le système admet une et une seule solution.

On obtient  $z_2 = 2a_1 - z_1$ ,  $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots$ ,  $z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1$  et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc  $z_1 = a_1 - a_2 + \dots - a_{n-1} + a_n$  puis  $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n$  puis  $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \dots + a_n \dots$  puis  $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ .

• Si  $n$  est pair,  $\det S = 0$  mais le mineur formé des  $n-1$  premières lignes et  $n-1$  dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang  $n-1$ , les  $n-1$  premières équations et  $n-1$  dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.

On résout les  $n-1$  premières équations constituant un système de CRAMER en  $z_2, \dots, z_n$ . On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z_1, z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots, z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 \dots = a_2 + a_4 + \dots$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  ont même isobarycentre.

En résumé, si  $n$  est pair et si les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.

Si  $n$  est pair et si les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions :  $M_1$  est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points  $A_1, A_2 \dots$

#### Exercice n° 4

Soit  $D_n$  le déterminant du système pour  $n \geq 3$ . En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 5, D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de  $D_3 = D_4 = -1$  :

$$\forall k \geq 1, D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour  $n$  élément de  $3\mathbb{N}^* \cup (1 + 3\mathbb{N}^*)$ , le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.

Pour  $n = 3k + 2$ , puisque  $D_n = 0$  mais que le mineur de format  $n-1$  constitué des  $n-1$  premières lignes et colonnes est  $D_{n-1}$  et est donc non nul, le système est homogène de rang  $n-1$  et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 1. On trouve aisément  $\mathcal{S} = \{\lambda(1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots, 1, -1), ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

#### Exercice n° 5

(1)  $\Rightarrow$  (2). Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que :  $(\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E^n / (\det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0) \Rightarrow ((f_1, \dots, f_n) \text{ liée})$ .

• Pour  $n = 1$ ,

$$(\forall \mathbf{a}_1 \in E / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq 1} = 0) \Rightarrow (\forall \mathbf{a}_1 / f_1(\mathbf{a}_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

• Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $(\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E^n / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_n) \text{ liée.}$

Soient  $f_1, \dots, f_{n+1}$   $n+1$  fonctions telles que  $\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}) \in E^{n+1} / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n+1} = 0$ .

Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée alors  $(f_1, \dots, f_{n+1})$  est liée en tant que sur-famille d'une famille liée. Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre, par hypothèse de récurrence, il existe  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$   $n$  éléments de  $E$  tels que  $\det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ . Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E, \det(f_i(a_1), \dots, f_i(a_n), f_i(x))_{1 \leq i \leq n+1} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(x) = 0$  où les  $\lambda_i$  sont

indépendants de  $x$  ou encore une égalité du type  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = 0$  avec  $\lambda_{n+1} = \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$  ce qui montre encore que  $(f_1, \dots, f_{n+1})$  est liée.

(2)  $\Rightarrow$  (1). On suppose que  $\exists(a_1, \dots, a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ . Montrons que  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ . En particulier :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$ . Les  $n$  égalités précédentes

fournissent un système d'équations linéaires en les  $\lambda_i$  à  $n$  inconnues,  $n$  équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ . On a montré que  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

### Exercice n° 6

Soit  $A_n$  la matrice de l'énoncé. En développant  $\det(A_n)$  suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format  $n-1$  obtenu suivant sa première ligne, on obtient  $\det(A_n) = -\det(A_{n-2})$  pour  $n \geq 3$ .

Par suite, pour  $p \geq 1, \det(A_{2p}) = (-1)^{p-1} \det(A_2) = (-1)^p \neq 0$  et pour  $p \geq 1, A_{2p}$  est inversible.

On a aussi, pour  $p \geq 1, \det(A_{2p+1}) = (-1)^{p-1} \det(A_3) = 0$  et, pour  $p \geq 1, A_{2p+1}$  n'est pas inversible. Finalement,  $A_n$  est inversible si et seulement si  $n$  est pair.

Dorénavant, on pose  $n = 2p$  ( $p \geq 1$ ). Pour  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \llbracket 2, 2p-1 \rrbracket, x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{cases}.$$

Ce système se résout en  $x_2 = y_1$  puis, par récurrence, pour  $k \leq p, x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + \dots + (-1)^{k-1} y_1$  et aussi  $x_{2p-1} = y_{2p}$ , puis, par récurrence, pour  $k \leq p, x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + \dots + (-1)^{p-k} y_{2p}$ . D'où l'inverse de  $A$  quand  $n = 8$  par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice n° 7

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $F = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X + b_k}$ . La fraction rationnelle  $F$  s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^n (X + b_k) \text{ et } P \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Q - P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les  $a_k$  sont deux à deux distincts,  $Q - P$  est divisible par  $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$ . Mais,  $Q$  est unitaire de degré  $n$

et  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n-1$ , et donc  $Q - P$  est unitaire de degré  $n$  ce qui montre que  $Q - P = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$  ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

Réciproquement, si  $F = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}$ , alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $F(a_k) = 1$ .

En résumé,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ solution de (S)} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X + b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \lim_{x \rightarrow -b_i} (x + b_i) \frac{\prod_{k=1}^n (x + b_k) - \prod_{k=1}^n (x - a_k)}{\prod_{k=1}^n (x + b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\prod_{k=1}^n (b_i + a_k)}{\prod_{k \neq i} (b_i - b_k)} \end{aligned}$$

### Exercice n° 8

1) Soit  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0 &\Rightarrow \forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k}^{(p)} = 0 \Rightarrow \forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p e^{a_k x} = 0 \\ &\Rightarrow \forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p \text{ (égalités obtenues pour } x = 0). \end{aligned}$$

Les  $n$  dernières égalités écrites constituent un système (S) de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Le déterminant de ce système est  $\text{Van}(a_1, \dots, a_n)$ . Ce déterminant n'est pas nul car les  $a_k$  sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de CRAMER homogène. (S) admet donc l'unique solution  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ . On a montré que la famille  $(f_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$  est libre.

2) Soit  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{C}^p$ .

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k (q_k^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \forall n \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^p \lambda_k q_k^n = 0.$$

Les  $p$  dernières égalités écrites constituent un système (S) de  $p$  équations linéaires à  $p$  inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Le déterminant de ce système est  $\text{Van}(q_1, \dots, q_p)$ . Ce déterminant n'est pas nul car les  $q_k$  sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de CRAMER homogène. (S) admet donc l'unique solution  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$ . On a montré que la famille  $((q_k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{1 \leq k \leq p}$  est libre.