

Planche n° 34. Déterminants

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : ()**

Montrer que
$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

Exercice n° 2 : ()**

Pour a, b et c donnés, dont les valeurs absolues sont deux à deux distinctes, factoriser
$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}.$$

Exercice n° 3 : (*)**

Calculer :

1) $\det(|i-j|)_{1 \leq i, j \leq n}$ 2) $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ (a_1, \dots, a_n étant n réels donnés) 3)
$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & \dots & a \end{vmatrix}$$

4)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
 5) $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1 \leq i, j \leq p+1}$ 6)
$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & -X \end{vmatrix}$$

Exercice n° 4 : (**)** (Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT)

Soit $A = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ réels tels que toutes les sommes $a_i + b_j$ soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

Exercice n° 5 : (**)**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où, pour tout i et tout j , $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1} .

Exercice n° 6 : (*)**

Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 7 : (*)**

Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(C) \geq 0$.

Exercice n° 8 : ()**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

Exercice n° 9 : (*)**

Déterminer les matrices A , carrées d'ordre n , telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Exercice n° 10 : (**)** (Déterminant circulant)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA . En déduire $\det A$.

Exercice n° 11 : (*)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(\text{com}(A))$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\text{com}(A)$ en fonction du rang de A .

Exercice n° 12 : (*)** (Dérivée d'un déterminant)

Soient $a_{i,j}$ ((i, j) élément de $[[1, n]]^2$) n^2 fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables sur \mathbb{R} et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer : **1)** $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

Exercice n° 13 : (*)**

Calculer :

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2)** $\det((i+j-1)^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ **3)** $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ **5)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b, c complexes distincts