Planche n° 34. Déterminants : corrigé

Exercice n° 1 :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = D(a)$). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des roles $D(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b + c = 0$ car alors D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul).

Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$, on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

Exercice n° 2 :

Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4.

En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X + a + b + c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X - a - b + c)$ ou $(X - a + b - c)$ ou $(X + a - b - c)$.

Si les quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c)$.
Notons alors que $-a - b - c = a + b - c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow a = b$. Par symétrie des rôles, deux des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres a, b ou c sont égaux en valeur absolue ce qui n'est pas le cas.

Exercice n° 3 :

1) Pour $n \geqslant 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1.

$$\Delta_n = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, ..., C_{n-1} - C_n, C_n) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, on fait apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1, L_2, ..., L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, ..., L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$, ce qui fournit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & \times & & \times \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

2) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$,

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j = \cos a_j S + \sin a_j C.$$

En particulier, $\text{Vect}(C_1, ..., C_n) \subset \text{Vect}(C, S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\forall n \geqslant 3,\ \det\left(\sin\left(a_i + a_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0.$$

Si $n = 2$, $\det\left(\sin\left(a_i + a_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} = \sin\left(2a_1\right)\sin\left(2a_2\right) - \sin^2\left(a_1 + a_2\right)$.

3) L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(pour } 1 \leqslant j \leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, ...,\ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{(pour } p+1 \leqslant i \leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2 - b^2)^p$.

4) On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, ..., C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, ..., C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \times \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = ... = \det(A_2) = 1$.

6) En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ et donc

$$D_n = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

Exercice n° 4 :

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts.

Soient λ_1,..., λ_n, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$.

$$\det(A) = \frac{1}{\lambda_n} \det\left(C_1, ..., C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j \right) = \det(B),$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $R = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X + b_j}$.

On prend $R = \frac{(X - a_1)...(X - a_{n-1})}{(X + b_1)...(X + b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2,\ a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée.

Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = ... = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \to -b_n} (z + b_n) R(z) = \frac{(-b_n - a_1)...(-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1)...(-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n)...(a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n - a_1) ... (a_n - a_{n-1}) (b_n - b_1) ... (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) ... (a_n + b_n) .. (a_2 + b_n)(a_1 + b_n)} \Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\Delta_n = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1, ..., a_n) \times \mathrm{Van}(b_1, ..., b_n)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}.$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de Hilbert) à calculer :

$$H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)^2}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}.$$

Mais,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,...,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc, $\forall n \geqslant 1,\ H_n = \dfrac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k!\right)^3}{n!^2\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}k!}$.

Exercice n° 5 :

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Pour $n = 1$, c'est clair.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit un entier divisible par 2^{n-1}.
Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé.
Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geqslant 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul.
Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n.
Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1.
Soit (i,j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1,...,C_j,...,C_n) - \det(C_1,...,C'_j,...,C_n) = \det(C_1,...,C_j - C'_j,...,C_n),$$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n. Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient $\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$, (mod 2^n). Ce dernier déterminant étant nul, Δ_{n+1} est un entier divisible par 2^n.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 6 :

$\det(M) = \mathrm{Van}(1,2,...,n) \neq 0$ et le système est de Cramer. Posons $\Delta = \det M$. Les formules de Cramer fournissent alors pour $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k = \text{Van}(1, ..., k-1, 0, k+1, ..., n) = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k-ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a

$$\begin{aligned}\Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 ... \times (k-1) \times (k+1) ... \times n \times \text{Van}(1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k} \times \frac{\text{Van}(1, 2, ..., n)}{(k-(k-1))...(k-1)((k+1)-k)....(n-k)} = (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Delta.\end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice n° 7 :

En remplaçant les colonnes C_1,..., C_n par respectivement $C_1 + iC_{n+1}$,..., $C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes L_{n+1},..., L_{2n} de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1} - iL_1$,..., $L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice n° 8 :

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+...+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} ... a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} ... a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+...+n+\sigma(n) = 2(1+2+...+n) \in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A.\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6...On obtient $\det B = (-1)^{2p} \det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Exercice n° 9 :

On suppose $n \geqslant 2$. La matrice nulle est solution du problème.
Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A+B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det(A) = \det(2A) = 2^n \det A$ puis $\det A = 0$ car $n \geqslant 2$. Donc, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.

Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-Cj$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C'_1, ..., -C_j, ..., C'_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement C_1',...,$-C_j$,...,C'_n est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A + B$ a une colonne nulle et donc $\det(A+B) = 0 \neq \det A + \det B$.
Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème. Réciproquement $A = 0$ est solution.

Exercice n° 10 :

Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 vaut :

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leqslant k+l-2 \leqslant 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0, n\} \Leftrightarrow k+l = 2$ ou $k+l = n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-\left(\omega^{k+l-2}\right)^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Le coefficient ligne k, colonne l de $P\overline{P}$ vaut :

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\overline{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$).

Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$.

Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}
\sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v &= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{v=l-n+1}^{0} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} \text{ (en posant } w = v+n) \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w)} a_w \\
&= \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v = \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v
\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites a_k et ω_k ont même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)} a_v$).

Posons alors $S_k = \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v$ pour k élément de $[\![1, n]\!]$. On a montré que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.

$\det(PA) = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)} S_k\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \prod_{k=1}^{n} S_k \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)\det P$.

Donc $\det P \det A = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)\det P$. Finalement, puisque $\det P \neq 0$,

$$\det A = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, $\det A = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + ja_2 + j^2 a_3)(a_1 + j^2 a_2 + ja_3)$.

Exercice n° 11 :

On a toujours $A \times {}^t\text{com}A = (\det A)I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)(\det({}^t\text{com}A)) = \det((\det A)I_n) = (\det A)^n.$$

Si $\det A \neq 0$, on obtient $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
Si $\det A = 0$, alors $A^t\text{com}A = 0$ et $\text{com}A$ n'est pas inversible car sinon, $A = 0$ puis $\text{com}A = 0$ ce qui est absurde.
Donc, $\det(\text{com}A) = 0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.$$

Si $\text{rg}A = n$, alors $\text{com}A \in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\text{com}A) \neq 0$) et $\text{rg}(\text{com}A) = n$.

Si $\text{rg}A \leqslant n-2$, soit A' une matrice de format $n-1$ extraite de A c'est-à-dire obtenue en supprimant dans A une ligne et une colonne. Alors $\text{rg}(A') \leqslant \text{rg}(A) \leqslant n-2 < n-1$. Puisque A' est de format $n-1$, A' n'est pas inversible et donc $\det(A') = 0$. Ainsi, tous les coefficients de la matrice $\text{com}(A)$ sont nuls et donc $\text{com}A = 0$. Dans ce cas, $\text{rg}(\text{com}A) = 0$.

Si $\text{rg}A = n-1$, il existe $n-1$ colonnes de A constituant une famille libre. Soit A' la matrice de format $(n, n-1)$ constituée de ces colonnes. On a $\text{rg}(A') = n-1$. Donc, il existe $n-1$ lignes de A' constituant une famille libre. Soit A'' la matrice de format $(n-1, n-1)$ constituée de ces lignes. On a $\text{rg}(A'') = n-1$. Donc A'' est une matrice carrée inversible. On en déduit que $\det(A'') \neq 0$. Mais $\det(A'')$ est, au signe près l'un des coefficients de la matrice $\text{com}(A)$. Donc, $\text{com}(A) \neq 0$. Par suite, $\text{rg}(\text{com}A) \geqslant 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} A \times {}^t(\text{com}A) = 0 &\Rightarrow \text{com}A \times {}^tA = 0 \Rightarrow \text{Im}\left({}^tA\right) \subset \text{Ker}(\text{com}A) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(\text{com}A)) \geqslant \text{rg}({}^tA) = \text{rg}A = n-1 \\ &\Rightarrow n - \text{rg}(\text{com}A) \geqslant n-1 \\ &\Rightarrow \text{rg}(\text{com}A) \leqslant 1, \end{aligned}$$

et finalement si $\text{rg}A = n-1$, $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.

Exercice n° 12 :

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$ et donc la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, en notant $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de A,

$$\begin{aligned} (\det A)' &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(1),1} \ldots a'_{\sigma(k),k} \ldots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a'_{\sigma(k),k} \ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^{n} \det(C_1, \ldots, C'_k, \ldots, C_n) \end{aligned}$$

Applications.

1) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \ldots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$. Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède,

$\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$.

On a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ ...
Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$.

C'est vrai pour $n = 1$ puis, si pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \ldots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \ldots & \ldots & x & x+a_n \end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + xC, \ldots, a_ne_n + xC)$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1, ..., a_ne_n) + \det(a_1e_1, ..., xC, ..., a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta_n'(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^{n} a_k = \sigma_n$ puis

$$\Delta_n'(0) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1e_1, ..., C, ..., a_ne_n) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i\neq k} a_i = \sigma_{n-1}.$$

Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Exercice n° 13 :

1) Pour le deuxième déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le premier, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le deuxième déterminant. Le premier déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

2) Pour (i, j) élément de $[\![1, n]\!]^2$, $(i + j - 1)^2 = j^2 + 2(i - 1)j + (i - 1)^2$. Donc,

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n} + ((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\mathrm{Vect}\left((1)_{1\leqslant i\leqslant n}, (i-1)_{1\leqslant i\leqslant n}, \left((i-1)^2\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang inférieur ou égal à 3. Donc, si $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225 - 256) - 4(100 - 144) + 9(64 - 81) = -31 + 176 - 153 = -8$.

3)

$$\Delta_n = \det(C_1, ..., C_n) = \det(C_1 + ... + C_n, C_2, ..., C_n) = (a + (n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2,..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a + (n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4) Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1 + xC, ..., C_n + xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ a_k \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$ et $C = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1, ..., C_n) + \sum_{k=1}^{n} \det\left(C_1, ..., C_{k-1}, xC, C_{k+1}, ..., C_n\right),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n = AX + B$ et $P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X)$. Quand $x = -b$ ou $x = -c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc :

1er cas. Si $b \neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\left\{\begin{array}{l} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{array}\right.$ et donc $A = -\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ et $B = \dfrac{cP(b) - bP(c)}{c - b}$. Ainsi, si $b \neq c$,

$$\Delta_n = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}x + \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).$$

2ème cas. Si $b = c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynomiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b = c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b \neq c$. Maintenant, quand b tend vers c, $-\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c - b)P(c)}{c - b},$$

tend vers $-bP'(b) + P(b)$. Si $b = c$,

$$\Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).$$

5) $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Puis, pour $n \geqslant 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geqslant 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n \geqslant 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n \geqslant 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n - 2) \times 1 = n + 1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n + 1.$$

