Planche n° 33. Le groupe symétrique : corrigé

Exercice n° 1 :

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Les inversions de σ sont :

$$\{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{2,6\},\ \{2,7\},\ \{2,8\},\ \{2,10\},\ \{2,11\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},$$
$$\{3,6\},\ \{3,7\},\ \{3,8\},\ \{6,7\},\ \{6,8\},\ \{9,10\},\ \{9,11\},\ \{9,12\}.$$

Au total, il y a $2+8+5+2+3 = 20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

2) $\tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.
Puis, $\tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{1,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = \tau_{1,3}$.
Par suite,

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{11,12}^{-1} \circ \tau_{9,11}^{-1} \circ \tau_{10,8}^{-1} \circ \tau_{8,5}^{-1} \circ \tau_{7,4}^{-1} \circ \tau_{5,2}^{-1} \circ \tau_{1,4}^{-1} \circ \tau_{1,3} \\ &= \tau_{11,12} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3}. \end{aligned}$$

σ est le produit de 8 transpositions et on retrouve le fait que σ est une permutation paire.

3) $O(1) = \{1,3,4,7\} = O(3) = O(4) = O(7)$, puis $O(2) = \{2,5,8,10\} = O(5) = O(8) = O(10)$ puis $O(6) = \{6\}$ et $O(9) = \{9,11,12\} = O(11) = O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

4) σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

On a $c_1^4 = c_2^4 = \mathrm{Id}$ et $c_3^3 = \mathrm{Id}$. Or, $2015 = 4 \times 1002 + 3$. Donc,

$$c_1^{2015} = c_1^3 \circ (c_1^4)^{1001} = c_1^3 = c_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

et de même $c_2^{2015} = c_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}$. Puis, $c_3^{2015} = \left(c_3^3\right)^{671} c_3^2 = c_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 9 \end{pmatrix}$. Puisque c_1, c_2 et c_3 commutent,

$$\sigma^{2015} = c_1^{2015} c_2^{2015} c_3^{2015} = c_1^{-1} c_2^{-1} c_3^{-1} = (c_1 c_2 c_3)^{-1} = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 & 3 & 10 & 11 & 2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 2 :

$(S_n, \circ)$ est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour $2 \leqslant i < j \leqslant n$, la transposition $\tau_{i,j}$ est produit des $\tau_{1,k}$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Mais

$$\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ i & 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ j & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ i & 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ 1 & j & i \end{pmatrix} = \tau_{i,j}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 3 :

Les éléments de A_n sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.

Soient i, j et k trois éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}$ est le 3-cycle : $i \to j\ j \to k\ k \to i$, ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.

Le cas $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = \mathrm{Id} = (231)(312)$ est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints. Soient i, j, k et l quatre éléments de deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$.

$$\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l} = (jikl) \circ (ijlk) = (jilk) = (ljik) \circ (jkil).$$

Donc, $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$ est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

Exercice n° 4 :

D'après le n° 2, il suffit de montrer que pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $\tau_{1,i}$ peut s'écrire en utilisant uniquement $\tau = \tau_{1,2}$ et $c = (2\ 3\ \ldots\ n\ 1)$. On note que $c^n = \mathrm{Id}$.

Tout d'abord, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, étudions $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) &\Leftrightarrow c^{n-i+1}(k) \in \{1, 2\} \Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\} \\ &\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}.\end{aligned}$$

Donc, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de σ à $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ est l'identité de cet ensemble. Comme σ n'est pas l'identité (car sinon $\tau = c^{-i+1-n+i-1} = c^{-n} = \mathrm{Id}$ ce qui est faux), σ est donc nécessairement la transposition $\tau_{i,i+1}$.

On a montré que $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$.

Vérifions maintenant que les $\tau_{1,i}$ s'écrivent à l'aide des $\tau_{j,j+1}$. D'après le n° 2, $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, et donc bien sûr, plus généralement, $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$.
Par suite, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ puis, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, puis, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$ ... et $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \ldots \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \ldots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice n° 5 :

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour x élément de G, on considère $f_x : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ y & \mapsto & xy \end{array}$. f_x est une application de G vers G et de plus, clairement $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = \mathrm{Id}_G$. Donc, pour tout élément x de G, f_x est une permutation de G.

Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} (G, \times) & \rightarrow & (S_G, \circ) \\ x & \mapsto & f_x \end{array}$. D'après ce qui précède, φ est une application. De plus, φ est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour $(x, x', y) \in G^3$, on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f'_x(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc $\forall (x, x') \in G^2,\ \varphi(xx') = \varphi(x) o \varphi(x')$.

Enfin, φ est injectif car, pour (x, x') élément de G^2,

$$\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow \forall y \in G,\ xy = x'y \Rightarrow xe = x'e \Rightarrow x = x',$$

(e désignant l'élément neutre de G).

φ est ainsi un isomorphisme de groupes de $(G, \times)$ sur $(f(G), \circ)$ qui est un sous groupe de $(S_G, \circ)$. $(G, \times)$ est bien isomorphe à un sous groupe de $(S_G, \circ)$.

Exercice n° 6 :

Montrons d'abord par récurrence sur $l \geqslant 2$ que la signature d'un cycle de longueur l est $(-1)^{l-1}$.

- C'est connu pour $l = 2$ (signature d'une transposition).
- Soit $l \geqslant 2$. Supposons que tout cycle de longueur l ait pour signature $(-1)^{l-1}$. Soit c un cycle de longueur $l+1$. On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_{l+1}\}$ le support de c et on suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ et que $c(x_{l+1}) = x_1$. Montrons alors que $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est un cycle de longueur l. $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ fixe déjà x_{l+1} puis, si $1 \leqslant i \leqslant l-1$,

$$\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$$

(car x_{i+1} n'est ni x_1, ni x_{l+1}), et enfin $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$. $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est donc bien un cycle de longueur l. Par hypothèse de récurrence, $\tau_{x_1,x_{l+1}}\circ c$ a pour signature $(-1)^{l-1}$ et donc, c a pour signature $(-1)^{(l+1)-1}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Montrons maintenant que si σ est une permutation quelconque de $[\![1,n]\!]$ ayant k orbites la signature de σ est $(-1)^{n-k}$.
Si σ est l'identité, σ a n orbites et le résultat est clair.
Si σ n'est pas l'identité, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints.
Posons $\sigma = c_1...c_p$ où p désigne le nombre d'orbites de σ non réduites à un singleton et donc $k-p$ est le nombre de points fixes de σ. Si l_i est la longueur de c_i, on a donc $n = l_1 + ... + l_p + (k-p)$ ou encore $n-k = l_1 + ... + l_p - p$. Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p}\varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{p}(-1)^{l_i-1} = (-1)^{l_1+...+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Exercice n° 7 :

1) a) Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}\text{ (obtenu quand } k=\sigma'(j)),$$

et est donc aussi le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$. Par suite,

$$\forall(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2,\ P_\sigma\times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.$$

b) Soit $\sigma\in S_n$. D'après a), $P_\sigma\times P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}}\times P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}\in G$. Par suite, $G\subset GL_n(\mathbb{R})$ (et clairement, $G\neq\varnothing$).

Soit alors $(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2$.

$$P_\sigma\times(P_{\sigma'})^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}}\in G.$$

On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & G \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif. Il reste à vérifier que φ est injectif.

Soit $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma)=\varphi(\sigma') \Rightarrow P_\sigma = P_{\sigma'} &\Rightarrow \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma'(j)}\\ &\Rightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \delta_{i,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma'(i)} \Rightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \sigma(i)=\sigma'(i)\\ &\Rightarrow \sigma=\sigma'.\end{aligned}$$

Donc φ est injectif.

Finalement, φ est un isomorphisme du groupe $(S_n,\circ)$ sur le groupe $(G,\times)$ et on a montré que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$.

2) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}\text{ (obtenu quand } k=\sigma(j)).$$

Ainsi, l'élément ligne i, colonne j, de AP_σ est l'élément ligne i, colonne $\sigma(j)$, de A, ou encore, si j est un élément donné de $[\![1,n]\!]$, la j-ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ème colonne de A. Ainsi, si on note C_1,...,C_n les colonnes de A (et donc $A = (C_1,...,C_n)$), alors $AP_\sigma = \left(C_{\sigma(1)},...,C_{\sigma(n)}\right)$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).

De même, le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma A$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{\sigma^{-1}(i),k}a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(on a utilisé $\sigma(k)=i\Leftrightarrow k=\sigma^{-1}(i)$) et multiplier A par P_σ à gauche a pour effet d'appliquer la permutation σ^{-1} aux lignes de A.

Exercice n° 8 :

$G = \{A_1, ..., A_p\}$ est déjà une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable pour $\times$. Il reste à vérifier que G est stable pour le passage à l'inverse.

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, puis $\varphi_i : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ A & \mapsto & A_iA \end{array}$. Puisque G est stable pour le produit, φ_i est une application de G dans G.

Montrons que φ_i est injective. Soit $(A, B) \in G^2$.

$$\varphi_(A) = \varphi_i(B) \Rightarrow A_iA = A_iB \Rightarrow A_i^{-1}A_iA = A_i^{-1}A_iB \Rightarrow A = B.$$

Donc, φ_i est une application injective de l'ensemble **fini** G dans lui-même. On sait alors que φ_i est une permutation de G.

Par φ_i, A_i a un antécédent A dans G. L'égalité $A_iA = A_i$ fournit $A_i^{-1}A_iA = A_i^{-1}A_i$ puis $A = I \in G$. Ainsi, G contient la matrice I. Ensuite, I a un antécédent par φ_i dans G. Donc, il existe $B \in G$ telle que $A_iB = I$. Mais alors $A_i^{-1} = B \in G$. G est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice n° 9 :

Pour $(x_1, ..., x_n) \in E$, on pose $\varphi((x_1, ..., x_n)) = x_1 + ... + x_n$. φ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de φ. H est donc bien un hyperplan de E.

Il est clair que, pour $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$.

$(\mathscr{L}(E), +, .)$ est un espace vectoriel et donc p est bien un endomorphisme de E.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\left(\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right)^2 = \sum_{(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'} = \sum_{(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2} f_{\sigma\circ\sigma'}.$$

$(S_n, \circ)$ est un groupe fini. Par suite, l'application $\begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\circ\sigma' \end{array}$, injective (même démarche que dans le n° 8), est une permutation de S_n. On en déduit que, pour σ' donnée, $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} f_{\sigma\circ\sigma'} = \sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$. Ainsi,

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}\left(\sum_{\sigma\in S_n} f_{\sigma\circ\sigma'}\right) = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n} n!p = \frac{1}{n!^2} \times n!.n!p = p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$p(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a autant de permutations σ telles que $\sigma(i) = 1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i) = 2$,... ou de permutations σ telles que $\sigma(i) = n$, à savoir $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$. Donc,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p(e_i) = \frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Posons $u = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(p(e_1), ..., p(e_n)) = \mathrm{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ est un élément de E,

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_kp(e_k) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)u = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H.

