

Planche n° 32. Séries numériques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*)** Un calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt$.

2) Montrer que $\forall t \in]0, \pi]$, $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

3) En utilisant le lemme de LEBESGUE, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice n° 2 ()** Un calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1) En remarquant que $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, converge et déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

2) En adaptant l'idée précédente, montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \geq 0$, converge et déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice n° 3 (*)** Séries de BERTRAND.

Soient α et β deux réels. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

1) Deux exemples : montrer que la série de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 1$, converge et que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$, $n \geq 2$, diverge.

2) Montrer que si $\alpha < 0$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

3) Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, la série de terme général u_n diverge.

4) Montrer que si $\alpha > 1$, la série de terme général u_n converge.

5) Dans cette question, $\alpha = 1$.

a) Montrer que si $\beta \leq 0$, la série de terme général u_n diverge.

b) En comparant u_n à une intégrale, montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice n° 4

Nature de la série de terme général

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1) (*) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ | 2) (*) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ | 3) (**) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ | 4) (**) $\frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch} n)}$ |
| 5) (**) $\operatorname{Arccos} \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ | 6) (*) $\frac{n^2}{(n-1)!}$ | 7) $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ | 8) (**) $\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{n^2+1}{n}\right)$ |
| 9) (*) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$ | 10) (**) $n^{-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ | 11) (**) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | |

Exercice n° 5

Nature de la série de terme général

- 1) (***) $\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. 2) (***) $\frac{1}{n^\alpha} S(n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, où $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$, $n \geq 2$.
- 3) (**) u_n où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}$. 4) (**) $\text{Arctan} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \right) - \text{Arctan} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^a \right)$, $a \in \mathbb{R}$.
- 5) (***) $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{3/2}$.

Exercice n° 6

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

- 1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 2) (**) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$ 3) (**) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$
- 4) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$ 5) (***) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ 6) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{a}{2^n} \right)$ $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$
- 7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{th} \frac{2n}{a}}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice n° 7 (*) I)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{n} \right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice n° 8 (*)**

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \times (n+1)!$.

Exercice n° 9 (*)**

Nature de la série de terme général $u_n = \sin \left(\pi \left(2 + \sqrt{3} \right)^n \right)$.

Exercice n° 10 ()**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice n° 11 (*)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1) \dots (1+u_n)}$, $n \geq 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Exercice n° 12

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

- 1) (**) $u_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$ 2) (***) $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \dots (a+n)}$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^{++}$ donné.

Exercice n° 13 (*)

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Exercice n° 14 (I)**

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice n° 15 (*) I)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1) Justifier l'existence de R_n . Quelle est la limite de R_n ?

2) En encadrant $\frac{1}{k^2}$ par des termes généraux de sommes télescopiques, montrer que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3) En commençant par remarquer que $\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de R_n quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 16 (*)**

Calculer $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$. Que constatez-vous ?

Exercice n° 17 (*)**

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geq 0$.

Exercice n° 18 (**)**

Pour $n \geq 1$, on note p_n le n -ème nombre premier. On veut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

1) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{p_n}$ est de même nature que la série de terme général $\ln \left(\left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right)$.

2) En utilisant la décomposition d'un entier naturel supérieur ou égal à 2, montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right).$$

Conclure.