

Planche n° 31. Intégration

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Toutes les fonctions considérées dans cette planche sont à valeurs réelles .

Exercice n° 1 : (**)**

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose

$$u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

Exercice n° 2 : (I)**

1) Soit f une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(1) \neq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$).

2) Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

Exercice n° 3 : (IT)**

Limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} & 2) \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k) \right)^{1/n} \quad (a > 0 \text{ donné}) & 3) \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} & 4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \\ 5) \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k}) & 6) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3+n^3} & 7) \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} & 8) n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}. \end{array}$$

Exercice n° 4 : (I)**

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5 : (I)** (Le lemme de LEBESGUE).

1) On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$.

2) (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Exercice n° 6 : (T)**

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a, b]$. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \mapsto \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right)$$

1) Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

2) Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \text{Inf}\{\varphi(f), f \in E\}$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Exercice n° 7 : (**)**

Etude complète de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt$.

Exercice n° 8 : (*)**

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

- 1) Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$.

4) Soit $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.

5) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice n° 9 : (*)**

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 f'^2(t) dt$.

Exercice n° 10 : (*)**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t - x|f(t) dt$. Etudier la dérivabilité de F sur \mathbb{R} .

Exercice n° 11 : (*)**

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt$.

Exercice n° 12 : (T)**

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice n° 13 : (T)**

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \left(\int_0^1 g(t) dt\right) \geq 1$.

Exercice n° 14 : (*)**

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

Exercice n° 15 : ()**

Montrer que $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice n° 16 : ()**

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$1) u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \text{Arcsin}^n x dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad 3) \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx.$$

Exercice n° 17 : (*)**

Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

Exercice n° 18 : (*)**

Trouver toutes les applications continues sur \mathbb{R} vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

Exercice n° 19 : (*)**

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $M = \sup\{|f'(x)|, x \in [a, b]\}$.

Montrer que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice n° 20 : (T)**

Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Exercice n° 21 : (I)**

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

2) Etude complète de $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Exercice n° 22 : (**)**

Soit $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$ si $t \neq 0$ et 0 si $t = 0$.

1) Vérifier que f est continue sur \mathbb{R} .

2) Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.