

Planche n° 29. Dimensions des espaces vectoriels

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Dans cette planche, la lettre \mathbb{K} désigne toujours un sous-corps de \mathbb{C} , comme \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice n° 1 : (**T)

E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 1, 1, 3)$, $e_3 = (2, 1, 1, 1)$, $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $e_5 = (2, 3, 0, 1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$. Quelles sont les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$?

Exercice n° 2 : (**IT)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E . Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Exercice n° 3 : (**)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \text{Ker}f + \text{Ker}g = \text{Im}f + \text{Im}g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice n° 4 : (**I)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .

2) Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Exercice n° 5 : (**T)

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$.

Exercice n° 6 : (**)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où a est un nombre complexe donné non nul.
 $z \mapsto z + a\bar{z}$

Montrer que f est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . f est-il un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} ? Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice n° 7 : (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x, y)) = (x', y')$.

1) Rappeler l'écriture générale de (x', y') en fonction de (x, y) .

2) Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C}, z' = az + b\bar{z}$.

3) Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de \mathbb{R}^2 est $z' = az + b\bar{z}$).

Exercice n° 8 : (**I)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies sur \mathbb{K} et u et v deux applications linéaires de E dans F . Montrer que : $|\text{rg}u - \text{rg}v| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}u + \text{rg}v$.

Exercice n° 9 : (***)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker}f = \text{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$ de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

2) Montrer que, pour tout endomorphisme f de \mathbb{R}^2 , on a :

$$(\text{Ker}f = \text{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E).$$

Exercice n° 10 : (*) (Le théorème des noyaux itérés)**

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \text{Ker}f^k$ et $I_k = \text{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = \text{Id}_E$).

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.

2) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}))$.

A partir d'ici, on suppose de plus que E est de dimension finie n .

3) a) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, \left(k < p \Rightarrow N_k \subsetneq N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1} \right)$.

b) Montrer que $p \leq n$.

4) Montrer que si $k < p, I_k \supsetneq I_{k+1}$ et si $k \geq p, I_k = I_{k+1}$.

5) Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées décroît de moins en moins vite ou aussi la suite des noyaux itérés croît de moins en moins vite).

Exercice n° 11 : (*)**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie notée n . Soit u un endomorphisme de E .

On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u , nilpotent d'indice 1 est 0).

1) Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p . Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.

2) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

3) On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n exactement. Déterminer $\text{rg}u$ (utiliser le n° 10).

Exercice n° 12 : (*)**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque sur \mathbb{K} et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(f-2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f-3\text{Id})$.

Exercice n° 13 : (IT)**

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. Soit F l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Exercice n° 14 : (I)**

Soit z un nombre complexe non réel. Montrer que $(1, z)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Exercice n° 15 : (I)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de $n+1$ polynômes tels que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg(P_k) = k$. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n° 16 : (I)**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^* / f^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent.

Exercice n° 17 : (*)**

1) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que f est une homothétie.

2) **Application.** On suppose de plus que E est de dimension finie. Déterminer les endomorphismes f de E qui commutent avec tous les endomorphismes g de E .