

# Planche n° 29. Dimensions des espaces vectoriels : corrigé

## Exercice n° 1

$e_4$  et  $e_5$  ne sont pas colinéaires. Donc  $(e_4, e_5)$  est une famille libre et  $\dim G = \text{rg}(e_4, e_5) = 2$ .  
Ensuite, puisque  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas colinéaires, on a  $2 \leq \dim F \leq 3$ . Soit alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & ((3) - (2)) \\ \nu - \lambda = 0 & ((1) - (2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que :  $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$ .

La famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est donc libre et  $\dim F = \text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$ .

Comme  $F \subset F + G$ ,  $\dim(F + G) \geq 3$  ou encore  $\dim(F + G) = 3$  ou 4. De plus :

$$\dim(F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors  $(\lambda, \mu, \nu)$  élément de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$  ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 & (4) \end{cases}.$$

(3) - (2) fournit  $\lambda = -1$  puis (1) - (2) fournit  $\nu = -2$  puis (2) fournit  $\mu = 4$ .

Avec ces valeurs, (4) n'est pas vérifiée car  $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$ . Le système proposé n'admet pas de solution ou encore  $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$ . Par suite,  $\dim(F + G) = 4$ .

Enfin,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

## Exercice n° 2

On a  $H_1 \subset H_1 + H_2$  et donc  $\dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$  ou encore  $\dim(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$ . Donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n - 1) + (n - 1) - (n - 1) = n - 1 \\ \text{ou} \\ (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Maintenant, si  $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$ , alors  $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$  et donc en particulier,  $H_1 = H_2$ . Réciproquement, si  $H_1 = H_2$  alors  $H_1 + H_2 = H_1$  et  $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ .

En résumé, si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux hyperplans distincts,  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$  et bien sûr, si  $H_1 = H_2$ , alors  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$ .

Si  $n = 2$ , les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul.

Si  $n = 3$ , les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

## Exercice n° 3

On a

$$n = \dim E = \dim(\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = n - \dim \text{Ker } f + n - \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim \text{Ker } g = n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

et donc  $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$  ou encore  $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ , et finalement,  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$ , ce qui montre que les sommes proposées sont directes.

#### Exercice n° 4

1) Si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors  $P(X+1) - P(X)$  est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Par suite,  $\varphi$  est bien une application de  $E$  dans lui-même.

Soient alors  $(P, Q) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

$\varphi$  est linéaire de  $E$  vers lui-même et donc un endomorphisme de  $E$ .

2) Soit  $P \in E$ .  $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$ . Montrons alors que  $P$  est constant.

Soit  $Q = P - P(0)$ .  $Q$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  s'annulant en les entiers naturels  $0, 1, 2, \dots$  (car  $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ ) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes.  $Q$  est donc le polynôme nul ou encore  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(0)$ . Par suite,  $P$  est un polynôme constant.

Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans  $\text{Ker } \varphi$  et donc

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer  $\text{Im } \varphi$ , on note tout d'abord que si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors

$\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . En effet, si  $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  (avec  $a_n$  quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\end{aligned}$$

Donc,  $\text{Im } (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc  $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . (On peut noter que le problème difficile « soit  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Existe-t-il  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(X+1) - P(X) = Q$ ? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

#### Exercice n° 5

Soit  $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$ . Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Donc,  $\text{Ker } f = \{(0, y, 0, y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0, 1)) = \text{Vect}(e_2 + e_4)$ . En particulier,  $\text{Ker } f$  est de dimension 1. Le théorème du rang permet d'affirmer que  $\dim(\text{Im}(f)) = 4 - \dim(\text{Ker } f) = 3$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}\text{Im } f &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(2e_1 + e_3, -(e_2 - e_4), e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(2(2e_1 + e_3) - (e_1 + 2e_3), e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(3e_1, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(e_1, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(e_1, e_1 + 2e_3 - e_1, e_2 - e_4) = \text{Vect}(e_1, 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(e_1, e_3, e_2 - e_4).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille  $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

D'autre part,  $\text{card}(e_1, e_3, e_2 - e_4) = 3 = \dim(\text{Im}f) < +\infty$ . On en déduit que la famille  $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$  est une base de  $\text{Im}f$ .

On peut aussi déterminer directement  $\text{Im}f$  de la façon suivante : soit  $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ .

$$u' \in \text{Im}f \Leftrightarrow \exists(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' + t' = 0.$$

(si  $y' + t' \neq 0$ , le système ci-dessus, d'inconnues  $x, y, z$  et  $t$ , n'a pas de solution et si  $y' + t' = 0$ , le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple  $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$ ).

Donc,  $\text{Im}f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}((e_1, e_2 - e_4, e_3))$ .

### Exercice n° 6

Soient  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

$f$  est donc  $\mathbb{R}$ -linéaire. On note que  $f(ia) = i(a - |a|^2)$  et que  $if(a) = i(a + |a|^2)$ . Donc,  $if(a) - f(ia) = 2i|a|^2$ . Comme  $a \neq 0$ , on a  $f(ia) \neq if(a)$ .  $f$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire.

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Posons  $z = re^{i\theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$z \in \text{Ker}f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

**1er cas.** Si  $|a| \neq 1$ , alors, pour tout réel  $\theta$ ,  $e^{2i\theta} \neq -a$ . Dans ce cas,  $\text{Ker}f = \{0\}$  et d'après le théorème du rang,  $\text{Im}f = \mathbb{C}$ .

**2ème cas.** Si  $|a| = 1$ , posons  $a = e^{i\alpha}$ .

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas,  $\text{Ker}f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$ . D'après le théorème du rang,  $\text{Im}f$  est une droite vectorielle et pour déterminer  $\text{Im}f$ , il suffit d'en fournir un vecteur non nul. Donc, si  $a \neq -1$ ,  $\text{Im}f = \text{Vect}(f(1)) = \text{Vect}(1 + a)$ . Si  $a = -1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$  et  $\text{Im}f = i\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 7

1) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , posons  $f((x, y)) = (x', y')$ .

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{cases}.$$

2) Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = \left(\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \gamma \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i\left(\beta \frac{z + \bar{z}}{2} + \delta \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

où  $a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}$  et  $b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$ .

3) Réciproquement, si  $z' = az + b\bar{z}$ , en posant  $a = a_1 + ia_2$  et  $b = b_1 + ib_2$  où  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ , on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{cases} .$$

Ceci montre que l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même d'expression complexe  $z' = az + b\bar{z}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

### Exercice n° 8

Par définition,  $\text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \dim(\text{Im}(\mathbf{u} + \mathbf{v}))$ .

Mais,  $\text{Im}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \{\mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x), x \in E\} \subset \{\mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x'), (x, x') \in E^2\} = \text{Im } \mathbf{u} + \text{Im } \mathbf{v}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \dim(\text{Im } \mathbf{u} + \text{Im } \mathbf{v}) = \dim(\text{Im } \mathbf{u}) + \dim(\text{Im } \mathbf{v}) - \dim(\text{Im } \mathbf{u} \cap \text{Im } \mathbf{v}) \leq \dim(\text{Im } \mathbf{u}) + \dim(\text{Im } \mathbf{v}) \\ &= \text{rg } \mathbf{u} + \text{rg } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{rg } \mathbf{u} + \text{rg } \mathbf{v}.$$

Ensuite,

$$\text{rg } \mathbf{u} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{v}) \leq \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \text{rg}(-\mathbf{v}) = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \text{rg } \mathbf{v},$$

(puisque  $\text{Im}(-\mathbf{v}) = \text{Im } \mathbf{v}$ ) et donc  $\text{rg } \mathbf{u} - \text{rg } \mathbf{v} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ . En échangeant les rôles de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , on a aussi  $\text{rg } \mathbf{v} - \text{rg } \mathbf{u} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  et finalement

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, |\text{rg } \mathbf{u} - \text{rg } \mathbf{v}| \leq \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

### Exercice n° 9

1) Posons  $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$  puis  $r = \dim F$ . D'après le théorème du rang,

$$r = \dim(\text{Im } f) = n - \dim(\text{Ker } f) = n - r,$$

et donc  $n = 2r$ . Donc,  $n$  est pair et  $r = \frac{n}{2}$ .

Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  ( $\dim G = n - r = r$ ). Soit  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  une base de  $G$ . Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on pose  $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{v}_i)$ . Montrons que la famille  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ .

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \in \text{Ker } f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i = 0,$$

car  $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une famille libre. Ainsi,  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  est une famille libre de  $\text{Im } f = F$  de cardinal  $r$  et donc une base de  $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$ .

Puisque  $E = F \oplus G$ ,  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  est une base de  $E$ . Puisque  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  sont dans  $\text{Im } f = \text{Ker } f$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{u}_i) = 0$ . D'autre part, par construction,  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ .

2) (1)  $\Rightarrow$  (2). Si  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ , alors pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $f(x)$  est dans  $\text{Im } f = \text{Ker } f$  et donc  $f(f(x)) = 0$ . Par suite,  $f^2 = 0$ . De plus, d'après le théorème du rang,  $n = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = 2r$  ce qui montre que  $n$  est nécessairement pair et que  $\text{rg } f = \frac{n}{2}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Si  $f^2 = 0$ , alors pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $f(f(x)) = 0$  ou encore pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $f(x)$  est dans  $\text{Ker } f$ . Ceci montre que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . De plus, d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker } f) = n - r = 2r - r = r = \dim(\text{Im } f) < +\infty.$$

Par suite,  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3). Supposons  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ . D'après ce qui précède,  $f^2 = 0$ . D'après 1), il existe une base  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  de  $E$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{u}_i) = 0$  et  $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ .

Soit alors  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par les égalités :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$  et  $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$  ( $g$  est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de  $E$ ). Pour  $i$  élément de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(\mathbf{u}_i) = f(\mathbf{v}_i) + g(0) = \mathbf{u}_i + 0 = \mathbf{u}_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(v_i) = f(u_i) + g(u_i) = 0 + v_i = v_i.$$

Les endomorphismes  $f \circ g + g \circ f$  et  $\text{Id}_E$  coïncident sur une base de  $E$ , et donc  $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Supposons que  $f^2 = 0$  et qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$ . Comme  $f^2 = 0$ , on a déjà  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . D'autre part, si  $x$  est un élément de  $\text{Ker } f$ , alors  $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im } f$  et on a aussi  $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ . Finalement,  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .

### Exercice n° 10

1) Soient  $k$  un entier naturel et  $x$  un élément de  $E$ .

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que :  $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$ . Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E/x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que :  $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset I_k$ .

2) Soit  $k$  un entier naturel. Supposons que  $N_k = N_{k+1}$ . On a déjà  $N_{k+1} \subset N_{k+2}$ . Montrons que  $N_{k+2} \subset N_{k+1}$ .

Soit  $x$  un élément de  $E$ .

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

3) a) On a  $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \dots$ . Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors,

$$0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots$$

Donc  $\dim N_1 \geq 1$ ,  $\dim N_2 \geq 2$  et par récurrence,  $\forall k \in \mathbb{N}, \dim N_k \geq k$ . En particulier,  $\dim N_{n+1} \geq n+1 > n = \dim E$ , ce qui est impossible. Donc, il existe  $k$  entier naturel tel que  $N_k = N_{k+1}$ .

Ainsi,  $\{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ ,  $K$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ .  $\{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$  admet donc un plus petit élément. Soit donc  $p$  le plus petit des entiers  $k$  tels que  $N_k = N_{k+1}$ .

Par définition de  $p$  (et même si  $p = 0$ ), pour  $k < p$ ,  $N_k \subsetneq N_{k+1}$ . D'autre part, d'après 2) et puisque  $N_p = N_{p+1}$ , on montre par récurrence que pour  $k \geq p$ , on a  $N_k = N_p$ .

b) Si  $p = 0$  (ou encore si  $f$  est injectif), on a  $p \leq n$ . Sinon

$$0 < \dim N_1 < \dots < \dim N_p$$

et donc, par récurrence, pour  $k \leq p$ , on a  $\dim N_k \geq k$ . En particulier

$$p \leq \dim N_p \leq n.$$

4) Puisque  $N_k \subset N_{k+1}$ ,  $I_{k+1} \subset I_k$  et que  $\dim E < +\infty$ , on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \text{rg}(f^k) = n - \text{rg}(f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour  $k < p$ ,  $I_k \supsetneq I_{k+1}$  et pour  $k \geq p$ ,  $I_k = I_{k+1}$ .

5) Soient  $k$  un entier naturel puis  $g_k$  la restriction de  $f$  à  $I_k$ . D'après le théorème du rang,

$$d_k = \dim(I_k) = \dim(\text{Ker } g_k) + \dim(\text{Im } g_k).$$

Maintenant,  $\text{Im}(g_k) = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$  et donc  $\dim(\text{Im}(g_k)) = d_{k+1}$ . D'autre part,  $\text{Ker } g_k = \text{Ker } f|_{I_k} = \text{Ker } f \cap I_k$ . Ainsi, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$d_k - d_{k+1} = \dim(\text{Ker } f \cap I_k).$$

Puisque la suite  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels  $(\dim(\text{Ker } f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

### Exercice n° 11

1) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  l'indice de nilpotence de  $u$ .

Par définition,  $u^{p-1} \neq 0$  et plus généralement, pour  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $u^k \neq 0$  car si  $u^k = 0$  alors  $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$  ce qui n'est pas.

Puisque  $u^{p-1} \neq 0$ , il existe au moins un vecteur  $x_0$  tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0$  (et en particulier  $x_0 \neq 0$ ).

Montrons que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est libre.

Soit  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$  tel que  $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ . Supposons par l'absurde qu'au moins un des coefficients  $\lambda_k$  ne soit pas nul. Soit  $i = \text{Min}\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i} \left( \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, p-1-i+k \geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de  $i$ . Donc tous les coefficients  $\lambda_k$  sont nuls et on a montré que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est libre.

2) Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc  $p \leq n$ . Par suite,

$$u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0.$$

3) On applique le n° 10. Puisque  $u^{n-1} \neq 0$ , on a  $N_{n-1} \subsetneq N_n$ .

Par suite (d'après le n° 10, 3a)), les inclusions  $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = E$  sont toutes strictes et donc

$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots < \dim N_n = n.$$

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $d_k$  est la dimension de  $N_k$ . Par récurrence, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a  $d_k \geq k$ .

Mais si de plus, pour un certain indice  $i$  élément de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a  $d_i = \dim N_i > i$ , alors, par récurrence, pour  $i \leq k \leq n$ , on a  $d_k > k$  et en particulier  $d_n > n$  ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim(N_k) = k.$$

D'après le théorème du rang,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\text{rg}(u^k) = n - k$ , et en particulier  $\text{rg}(u) = n - 1$ .

### Exercice n° 12

Montrons que  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) = \{0\}$ . Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) &\Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc,  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) = \{0\}$  (même si  $f^2 - 5f + 6\text{Id} \neq 0$ ).

Montrons que  $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 3\text{Id})$ . Soit  $x \in E$ . On cherche  $y$  et  $z$  tels que  $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ ,  $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})$  et  $x = y + z$ .

Si  $y$  et  $z$  existent, nécessairement  $y$  et  $z$  sont solution du système  $\begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$  et donc  $\begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$ .

Réciproquement. Soient  $x \in E$  puis  $y = 3x - f(x)$  et  $z = f(x) - 2x$ . On a bien  $y + z = x$  puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6\text{Id}) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et donc  $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ . De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et donc  $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})$ . On a montré que  $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 3\text{Id})$  et finalement que

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 3d).$$

### Exercice n° 13

On sait déjà que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (voir exercice n° 19, planche n° 28). Soit  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

$$u \mapsto (u_0, u_1)$$

- $\varphi$  est bien une application de  $F$  dans  $\mathbb{C}^2$ .
- Soient  $(u, v) \in F^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0, u_1) + \mu(v_0, v_1) \\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v). \end{aligned}$$

$\varphi$  est une application linéaire de  $F$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

- Soit  $u \in \text{Ker}\varphi$ . Alors  $u_0 = u_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n$  (puisque  $a \neq 0$ ). Mais alors, par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$  ou encore  $u = 0$ . Ainsi,  $\text{Ker}\varphi$  est le sous-espace nul et donc  $\varphi$  est injectif.
- Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = a, u_1 = b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ .  $u$  est un élément de  $F$  tel que  $\varphi(u) = (a, b)$ . Ceci montre que  $\varphi$  est surjectif.

Finalement,  $\varphi$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $\mathbb{C}^2$ . En particulier,  $\dim F = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$ .

On a montré que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2.

### Exercice n° 14

On a déjà montré que la famille  $(1, z)$  est une famille libre du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  (voir exercice n° 23, planche 28). De plus,  $\text{card}(1, z) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) < +\infty$ . Donc  $(1, z)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

### Exercice n° 15

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg(P_k) \leq n$ . Donc chaque  $P_k, 0 \leq k \leq n$ , est un élément de  $\mathbb{R}_n[X]$ . De plus,

$$\text{card}(P_k)_{0 \leq k \leq n} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X] < +\infty.$$

Pour montrer que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , il suffit de vérifier que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre.

Soit  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$ . Supposons par l'absurde que l'un au moins des  $\lambda_k$  ne soit pas nul.

Soit  $p = \text{Max}\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$  ( $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$  est une partie non vide et majorée (par  $n$ ) de  $\mathbb{N}$  et donc  $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$  admet un plus grand élément). Par définition de  $p$ ,

$$\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k = 0.$$

Cette dernière égalité est impossible car  $\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k$  est un polynôme de degré  $p$  (puisque  $\lambda_p \neq 0$ ) et donc  $\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k$  n'est pas le polynôme nul. Donc

$$\forall (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \left( \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0 \right),$$

et la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre.

On a montré que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Exercice n° 16

Soit  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base de  $E$ . Par hypothèse,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists p_k \in \mathbb{N}^* / f^{p_k}(e_k) = 0$ . Soit  $p = \text{Max}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .  $p$  est un entier naturel non nul et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p - p_k \geq 0$ . On a donc

$$f^p(e_k) = f^{p-p_k}(f^{p_k}(e_k)) = f^{p-p_k}(0) = 0.$$

L'endomorphisme  $f^p$  s'annule en chacun des vecteurs d'une base de  $E$  et donc  $f^p = 0$ . On a montré que  $f$  est nilpotent.

### Exercice n° 17

1) Si  $E = \{0\}$ , alors  $f = 0$  et en particulier  $f$  est une homothétie. Dorénavant, on supposera que  $E \neq \{0\}$ . Soit  $x_0$  un élément non nul de  $E$ . Par hypothèse, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x_0) = \lambda x_0$ . Vérifions alors que pour tout  $x$  de  $E$ ,  $f(x) = \lambda x$ . Soit donc  $x$  un élément de  $E$ .

**1er cas.** Supposons la famille  $(x, x_0)$  libre.

Il existe  $\lambda_x \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$  et il existe  $\lambda_{x+x_0} \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0$ . Puisque  $f$  est linéaire,

$$\lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0 = f(x+x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda x_0.$$

Puisque la famille  $(x, x_0)$  est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient  $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda$ . Par suite,  $f(x) = \lambda x$ .

**2ème cas.** Supposons la famille  $(x, x_0)$  liée. Puisque  $x_0$  n'est pas nul, il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $x = \mu x_0$ . Mais alors

$$f(x) = f(\mu x_0) = \mu f(x_0) = \mu \lambda x_0 = \lambda \mu x_0 = \lambda x.$$

Ainsi, on a trouvé  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $f(x) = \lambda x$  ou encore on a trouvé  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f = \lambda \text{Id}$ . On a montré que  $f$  est une homothétie.

2) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f$ . Vérifions que  $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda_x x$  ou encore vérifions que  $\forall x \in E, f(x) \in \text{Vect}(x)$ . C'est immédiat si  $x = 0$ .

Soit  $x$  un élément non nul de  $E$ . Soit  $D$  la droite vectorielle engendrée par  $x$ , soit  $H$  un supplémentaire de  $D$  dans  $E$  puis  $s$  la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $H$ .

$$s \circ f = f \circ s \Rightarrow s(f(x)) = f(s(x)) \Rightarrow s(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in \text{Vect}(x).$$

Ainsi,  $\forall x \in E, f(x) \in \text{Vect}(x)$ . D'après 1),  $f$  est nécessairement une homothétie.

Réciproquement, soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  puis  $f = \lambda \text{Id}$ . Pour tout  $g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = \lambda \text{Id} \circ g = \lambda g, g \circ f = g \circ \lambda \text{Id} = \lambda g \circ \text{Id} = \lambda g$  et donc  $f \circ g = g \circ f$ .

On a montré que les endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes sont les homothéties vectorielles.