Planche n° 29. Dimensions des espaces vectoriels : corrigé

Exercice n° 1

e_4 et e_5 ne sont pas colinéaires. Donc (e_4, e_5) est une famille libre et dim $G = \text{rg}\,(e_4, e_5) = 2$.
Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leqslant \dim F \leqslant 3$. Soit alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu+2\nu=0 \quad (1)\\ 2\lambda+\mu+\nu=0 \quad (2)\\ 3\lambda+\mu+\nu=0 \quad (3)\\ 4\lambda+3\mu+\nu=0 \quad (4)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=0\ ((3)-(2))\\ \nu-\lambda=0\ ((1)-(2))\\ \lambda+\mu+2\nu=0\ (1)\end{array}\right. \Rightarrow \lambda=\mu=\nu=0.$$

On a montré que : $\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3,\ (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$.
La famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre et dim $F = \text{rg}\,(e_1, e_2, e_3) = 3$.

Comme $F \subset F + G$, dim $(F + G) \geqslant 3$ ou encore dim $(F + G) = 3$ ou 4. De plus :

$$\dim\,(F+G) = 3 \Leftrightarrow F = F+G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors (λ, μ, ν) élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ ce qui équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu+2\nu=-1 \quad (1)\\ 2\lambda+\mu+\nu=0 \quad (2)\\ 3\lambda+\mu+\nu=-1 \quad (3)\\ 4\lambda+3\mu+\nu=2 \quad (4)\end{array}\right..$$

$(3) - (2)$ fournit $\lambda = -1$ puis $(1) - (2)$ fournit $\nu = -2$ puis (2) fournit $\mu = 4$.
Avec ces valeurs, (4) n'est pas vérifiée car $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution ou encore $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Par suite, dim $(F + G) = 4$.

Enfin,

$$\dim\,(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F+G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Exercice n° 2

On a $H_1 \subset H_1 + H_2$ et donc dim $(H_1 + H_2) \geqslant n - 1$ ou encore dim $(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$. Donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1+H_2) = \left\{\begin{array}{c}(n-1)+(n-1)-(n-1) = n-1\\ \text{ou}\\ (n-1)+(n-1)-n = n-2\end{array}\right..$$

Maintenant, si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$.
Réciproquement, si $H_1 = H_2$ alors $H_1 + H_2 = H_1$ et dim $(H_1 + H_2) = n - 1$.

En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$ et bien sûr, si $H_1 = H_2$, alors dim $(H_1 \cap H_2) = n - 1$.

Si $n = 2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul.

Si $n = 3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Exercice n° 3

On a

$$n = \dim E = \dim(\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim\,(\text{Ker } g) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim\,(\text{Im } f) + \dim\,(\text{Im } g) - \dim\,(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = n - \dim \text{Ker } f + n - \dim\,(\text{Ker } g) - \dim\,(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$\dim\,(\text{Ker } f) + \dim \text{Ker } g = n + \dim\,(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim\,(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

et donc dim $(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim\,(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ ou encore dim $(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim\,(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$, et finalement, $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, ce qui montre que les sommes proposées sont directes.

Exercice n° 4

1) Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1)-P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même.

Soient alors $(P,Q)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q)&=(\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)=\lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))\\&=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2) Soit $P\in E$. $P\in\text{Ker }\varphi\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ P(x+1)=P(x)$. Montrons alors que P est constant.
Soit $Q=P-P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2, ... (car $P(0)=P(1)=P(2)=...$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant.
Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans Ker φ et donc

$$\text{Ker }\varphi=\{\text{polynômes constants}\}=\mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer Im φ, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P)=P(X+1)-P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P=a_nX^n+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P)&=a_n((X+1)^n-X^n)+\text{termes de degré inférieur on égal à }n-1\\&=a_n(X^n-X^n)+\text{termes de degré inférieur on égal à }n-1\\&=\text{termes de degré inférieur on égal à }n-1\end{aligned}$$

Donc, Im $(\varphi)\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\text{dim Im }(\varphi)=\text{dim }\mathbb{R}_n[X]-\text{dim Ker }(\varphi)=(n+1)-1=n=\text{dim }\mathbb{R}_{n-1}[X]<+\infty,$$

et donc Im $\varphi=\mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1)-P(X)=Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Exercice n° 5

Soit $u=(x,y,z,t)=xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in\mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u)&=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)=x(2e_1+e_3)+y(-e_2+e_4)+z(e_1+2e_3)+t(e_2-e_4)\\&=(2x+z)e_1+(-y+t)e_2+(x+2z)e_3+(y-t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u\in\text{Ker }f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+z=0\\-y+t=0\\x+2z=0\\y-t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=z=0\\y=t\end{array}\right..$$

Donc, Ker $f=\{(0,y,0,y),\ y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((0,1,0,1))=\text{Vect}\,(e_2+e_4)$. En particulier, Ker f est de dimension 1. Le théorème du rang permet d'affirmer que dim (Im(f)) = 4 − dim (Kerf) = 3. Ensuite,

$$\begin{aligned}\text{Im}f&=\text{Vect}\,(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4))=\text{Vect}\,(2e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+2e_3,e_2-e_4)\\&=\text{Vect}\,(2e_1+e_3,-(e_2-e_4),e_1+2e_3,e_2-e_4)=\text{Vect}\,(2e_1+e_3,e_1+2e_3,e_2-e_4)\\&=\text{Vect}\,(2(2e_1+e_3)-(e_1+2e_3),e_1+2e_3,e_2-e_4)=\text{Vect}\,(3e_1,e_1+2e_3,e_2-e_4)\\&=\text{Vect}\,(e_1,e_1+2e_3,e_2-e_4)=\text{Vect}\,(e_1,e_1+2e_3-e_1,e_2-e_4)=\text{Vect}\,(e_1,2e_3,e_2-e_4)\\&=\text{Vect}\,(e_1,e_3,e_2-e_4).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (e_1,e_3,e_2-e_4) est une famille génératrice de Imf.

D'autre part, card $(e_1, e_3, e_2 - e_4) = 3 = \dim(\mathrm{Im} f) < +\infty$. On en déduit que la famille $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

On peut aussi déterminer directement $\mathrm{Im} f$ de la façon suivante : soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \dfrac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y' + t' = 0.$$

(si $y' + t' \neq 0$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' + t' = 0$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\dfrac{1}{3}(2x' - z'), 0, \dfrac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)\Big)$.

Donc, $\mathrm{Im}\, f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Vect}((e_1, e_2 - e_4, e_3))$.

Exercice n° 6

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a\left(\overline{\lambda z + \mu z'}\right) = \lambda\,(z + a\overline{z}) + \mu\left(z' + a\overline{z'}\right) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i\left(a - |a|^2\right)$ et que $if(a) = i\left(a + |a|^2\right)$. Donc, $if(a) - f(ia) = 2i|a|^2$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow z + a\overline{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C}$.

2ème cas. Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\, f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\mathrm{Im}\, f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul. Donc, si $a \neq -1$, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(1)) = \mathrm{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)$ et $\mathrm{Im}\, f = i\mathbb{R}$.

Exercice n° 7

1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{\begin{array}{l} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{array}\right. .$$

2) Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = \left(\alpha\frac{z + \overline{z}}{2} + \gamma\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + i\left(\beta\frac{z + \overline{z}}{2} + \delta\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\overline{z} = az + b\overline{z} \end{aligned}$$

où $a = \dfrac{\alpha + \delta}{2} + i\dfrac{\beta - \gamma}{2}$ et $b = \dfrac{\alpha - \delta}{2} + i\dfrac{\beta + \gamma}{2}$.

3) Réciproquement, si $z' = az + b\overline{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\left\{\begin{array}{l} x' = (a_1+b_1)x + (b_2-a_2)y \\ y' = (a_2+b_2)x + (a_1-b_1)y \end{array}\right. .$$

Ceci montre que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même d'expression complexe $z' = az + b\overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Exercice n° 8

Par définition, rg $(u+v) = \dim(\text{Im}\ (u+v))$.
Mais, Im $(u+v) = \{u(x)+v(x),\ x \in E\} \subset \{u(x)+v(x'),\ (x,x') \in E^2\} = \text{Im}\ u + \text{Im}\ v$. Donc,

$$\begin{aligned} \text{rg}\ (u+v) &= \dim(\text{Im}\ u + \text{Im}\ v) = \dim(\text{Im}\ u) + \dim(\text{Im}\ v) - \dim(\text{Im}\ u \cap\ \text{Im} v) \leqslant \dim(\text{Im}\ u) + \dim(\text{Im}\ v) \\ &= \text{rg}\ u + \text{rg}\ v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ \text{rg}\ (u+v) = \text{rg}\ u + \text{rg}\ v.$$

Ensuite,

$$\text{rg}\ u = \text{rg}\ (u+v-v) \leqslant \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ (-v) = \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ v,$$

(puisque Im $(-v) =$ Im v) et donc rg $u -$ rg $v =$ rg $(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi rg $v -$ rg $u =$ rg $(u+v)$ et finalement

$$\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ |\text{rg}\ u - \text{rg}\ v| \leqslant \text{rg}\ (u+v).$$

Exercice n° 9

1) Posons $F = \text{Ker} f = \text{Im} f$ puis $r = \dim F$. D'après le théorème du rang,

$$r = \dim(\text{Im} f) = n - \dim(\text{Ker} f) = n - r,$$

et donc $n = 2r$. Donc, n est pair et $r = \dfrac{n}{2}$.

Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = n - r = r$). Soit $(v_1, ..., v_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $u_i = f(v_i)$. Montrons que la famille $(u_1, ..., u_r)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \in \text{Ker}\ f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ \lambda_i = 0,$$

car $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une famille libre. Ainsi, $(u_1, ..., u_r)$ est une famille libre de Im $f = F$ de cardinal r et donc une base de $F = \text{Ker}\ f = \text{Im}\ f$.

Puisque $E = F \oplus G$, $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_r)$ est une base de E. Puisque $u_1, \ldots, u_r$ sont dans $\text{Im} f = \text{Ker} f$, $\forall i[\![1, r]\!]$, $f(u_i) = 0$. D'autre part, par construction, $\forall i[\![1, r]\!]$, $f(v_i) = u_i$.

2) (1) $\Rightarrow$ (2). Si Ker $f =$ Im f, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans Im $f =$ Ker f et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim(\text{Ker}\ f) + \text{rg}\ f = 2r$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que rg $f = \dfrac{n}{2}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $f^2 = 0$, alors pour tout élément x de E, $f(f(x)) = 0$ ou encore pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans $\text{Ker} f$. Ceci montre que $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$. De plus, d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker} f) = n - r = 2r - r = r = \dim(\text{Im} f) < +\infty.$$

Par suite, Ker $f =$ Im f.

(1) $\Rightarrow$ (3). Supposons $\text{Ker} f = \text{Im} f$. D'après ce qui précède, $f^2 = 0$. D'après 1), il existe une base $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_r)$ de E telle que $\forall i[\![1, r]\!]$, $f(u_i) = 0$ et $f(v_i) = u_i$.

Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ g(u_i) = v_i$ et $g(v_i) = v_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1, r]\!]$, on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(u_i) = f(v_i) + g(0) = u_i + 0 = u_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(v_i) = f(u_i) + g(u_i) = 0 + v_i = v_i.$$

Les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E, et donc $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. D'autre part, si x est un élément de $\mathrm{Ker}\, f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}\, f$ et on a aussi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$. Finalement, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice n° 10

1) Soient k un entier naturel et x un élément de E.

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f\left(f^k(x)\right) = f(0) \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/\ x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E/\ x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$.

2) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$. On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.

Soit x un élément de E.

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

3) a) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \ldots$ Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors,

$$0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \ldots$$

Donc $\dim N_1 \geqslant 1$, $\dim N_2 \geqslant 2$ et par récurrence , $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim N_k \geqslant k$. En particulier, $\dim N_{n+1} \geqslant n + 1 > n = \dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.

Ainsi, $\{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de $\mathbb{N}$. $\{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$ admet donc un plus petit élément. Soit donc p le plus petit des entiers k tels que $N_k = N_{k+1}$.
Par définition de p (et même si $p = 0$), pour $k < p$, $N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1}$. D'autre part, d'après 2) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k \geqslant p$, on a $N_k = N_p$.

b) Si $p = 0$ (ou encore si f est injectif), on a $p \leqslant n$. Sinon

$$0 < \dim N_1 < \ldots < \dim N_p$$

et donc, par récurrence, pour $k \leqslant p$, on a $\dim N_k \geqslant k$. En particulier

$$p \leqslant \dim N_p \leqslant n.$$

4) Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim E < +\infty$, on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \mathrm{rg}\ \left(f^k\right) = n - \mathrm{rg}\ \left(f^{k+1}\right) \Leftrightarrow \dim\ (I_k) = \dim (I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \underset{\neq}{\supset} I_{k+1}$ et pour $k \geqslant p$, $I_k = I_{k+1}$.

5) Soient k un entier naturel puis g_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang,

$$d_k = \dim\ (I_k) = \dim\ (\mathrm{Ker}\ g_k) + \dim\ (\mathrm{Im}\ g_k).$$

Maintenant, $\mathrm{Im}\,(g_k) = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}\,(g_k)) = d_{k+1}$. D'autre part, $\mathrm{Ker}\ g_k = \mathrm{Ker}\ f_{/I_k} = \mathrm{Ker}\ f \cap I_k$. Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$d_k - d_{k+1} = \dim(\mathrm{Ker} f \cap I_k).$$

Puisque la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim\ (\mathrm{Ker}\ f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice n° 11

1) Soit $p(\in \mathbb{N}^*)$ l'indice de nilpotence de u.
Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.

Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et en particulier $x_0 \neq 0$).
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons par l'absurde qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \text{Min}\{k \in [\![0, p-1]\!]/\ \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i}\left(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geqslant i+1,\ p-1-i+k \geqslant p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\
&\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i. Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

2) Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leqslant n$. Par suite,

$$u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0.$$

3) On applique le n° 10. Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n$.
Par suite (d'après le n° 10, 3)a)), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc

$$0 < \text{dim}N_1 < \text{dim}N_2 \ldots < \text{dim}N_n = n.$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons d_k est la dimension de N_k. Par récurrence, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $d_k \geqslant k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a $d_i = \text{dim}N_i > i$, alors, par récurrence, pour $i \leqslant k \leqslant n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \text{dim}\ (N_k) = k.$$

D'après le théorème du rang, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\text{rg}\ \left(u^k\right) = n - k$, et en particulier $\text{rg}(u) = n - 1$.

Exercice n° 12

Montrons que $\text{Ker}\ (f - 2Id) \cap \text{Ker}\ (f - 3Id) = \{0\}$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker}\ (f - 2Id) \cap \text{Ker}\ (f - 3Id) &\Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}\ (f - 2Id) \cap \text{Ker}\ (f - 3Id) = \{0\}$ (même si $f^2 - 5f + 6Id \neq 0$).

Montrons que $E = \text{Ker}\ (f - 2Id) + \text{Ker}\ (f - 3Id)$. Soit $x \in E$. On cherche y et z tels que $y \in \text{Ker}\ (f - 2Id)$, $z \in \text{Ker}\ (f - 3Id)$ et $x = y + z$.
Si y et z existent, nécessairement y et z sont solution du système $\left\{\begin{array}{l} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{array}\right.$.

Réciproquement . Soient $x \in E$ puis $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$. On a bien $y + z = x$ puis

$$\begin{aligned}
f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6Id) \\
&= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y
\end{aligned}$$

et donc $y \in \text{Ker}\ (f - 2Id)$. De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et donc $z \in \text{Ker}\ (f - 3Id)$. On a montré que $E = \text{Ker}\ (f - 2Id) + \text{Ker}\ (f - 3d)$ et finalement que

$$E = \text{Ker}\,(f - 2Id) \oplus \text{Ker}\,(f - 3d).$$

Exercice n° 13

On sait déjà que F est un sous-espace vectoriel de E (voir exercice n° 19, planche n° 28). Soit $\begin{array}{cccc} \varphi & F & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.

- φ est bien une application de F dans $\mathbb{C}^2$.
- Soient $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda\,(u_0, u_1) + \mu\,(v_0, v_1)\\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).\end{aligned}$$

φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{C}^2$.

- Soit $u \in \text{Ker}\varphi$. Alors $u_0 = u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{b}{a}u_{n+1} - \dfrac{c}{a}u_n$ (puisque $a \neq 0$). Mais alors, par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ ou encore $u = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\varphi$ est le sous-espace nul et donc φ est injectif.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. u est un élément de F tel que $\varphi(u) = (a, b)$. Ceci montre que φ est surjectif.

Finalement, φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^2$. En particulier, $\text{dim}F = \text{dim}\left(\mathbb{C}^2\right) = 2$.

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Exercice n° 14

On a déjà montré que la famille $(1, z)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (voir exercice n° 23, planche 28). De plus, $\text{card}(1, z) = 2 = \text{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) < +\infty$. Donc $(1, z)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice n° 15

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg\,(P_k) \leqslant n$. Donc chaque P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus,

$$\text{card}\,(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = n + 1 = \text{dim}\mathbb{R}_n[X] < +\infty.$$

Pour montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Supposons par l'absurde que l'un au moins des λ_k ne soit pas nul.

Soit $p = \text{Max}\{k \in [\![0, n]\!] /\ \lambda_k \neq 0\}$ ($\{k \in [\![0, n]\!] /\ \lambda_k \neq 0\}$ est une partie non vide et majorée (par n) de $\mathbb{N}$ et donc $\{k \in [\![0, n]\!] /\ \lambda_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément). Par définition de p,

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k P_k = 0.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k P_k$ est un polynôme de degré p (puisque $\lambda_p \neq 0$) et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k P_k$ n'est pas le polynôme nul. Donc

$$\forall\,(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0\right),$$

et la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

On a montré que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n° 16

Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E. Par hypothèse, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists p_k \in \mathbb{N}^* /\ f^{p_k}\,(e_k) = 0$. Soit $p = \text{Max}\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p - p_k \geqslant 0$. On a donc

$$f^p\,(e_k) = f^{p-p_k}\,(f^{p_k}\,(e_k)) = f^{p-p_k}(0) = 0.$$

L'endomorphisme f^p s'annule en chacun des vecteurs d'une base de E et donc $f^p = 0$. On a montré que f est nilpotent.

Exercice n° 17

1) Si $E = \{0\}$, alors $f = 0$ et en particulier f est une homothétie. Dorénavant, on supposera que $E \neq \{0\}$. Soit x_0 un élément non nul de E. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda x_0$. Vérifions alors que pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$. Soit donc x un élément de E.

1er cas. Supposons la famille (x, x_0) libre.
Il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ et il existe $\lambda_{x+x_0} \in \mathbb{K}$ tel que $f(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0) = \lambda_{x+x_0} + \lambda_{x+x_0} x_0$. Puisque f est linéaire,

$$\lambda_{x+x_0} + \lambda_{x+x_0} x_0 = f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda x_0.$$

Puisque la famille (x, x_0) est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda$. Par suite, $f(x) = \lambda x$.

2ème cas. Supposons la famille (x, x_0) liée. Puisque x_0 n'est pas nul, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$. Mais alors

$$f(x) = f(\mu x_0) = \mu f(x_0) = \mu.\lambda x_0 = \lambda.\mu x_0 = \lambda x.$$

Ainsi, on a trouvé $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$ ou encore on a trouvé $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}$. On a montré que f est une homothétie.

2) Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. Vérifions que $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda_x x$ ou encore vérifions que $\forall x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. C'est immédiat si $x = 0$.
Soit x un élément non nul de E. Soit D la droite vectorielle engendrée par x, soit H un supplémentaire de D dans E puis s la symétrie par rapport à D parallèlement à H.

$$s \circ f = f \circ s \Rightarrow s(f(x)) = f(s(x)) \Rightarrow s(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Vect}(x).$$

Ainsi, $\forall x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. D'après 1), f est nécessairement une homothétie.

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ puis $f = \lambda \mathrm{Id}$. Pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g = \lambda \mathrm{Id} \circ g = \lambda g$, $g \circ f = g \circ \lambda \mathrm{Id} = \lambda g \circ \mathrm{Id} = \lambda g$ et donc $f \circ g = g \circ f$.

On a montré que les endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes sont les homothéties vectorielles.

