Planche n° 28. Espaces vectoriels

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*T)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$ **2)** $f(0)=0$ **3)** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ **4)** $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$
5) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\geqslant 0$ **6)** $2f(0)=f(1)+3$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice n° 2 : (T)**

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ **2)** $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=1\}$
3) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=x_2\}$ **4)** $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+...+x_n=0\}$
5) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1\times x_2=0\}$

Exercice n° 3 : (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A\cap B=A\cap C$, $A+B=A+C$ et $B\subset C$. Montrer que $B=C$.

Exercice n° 4 : (T)**

Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u=(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(\cos(n\theta+a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=(\cos(n\theta+b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés. Montrer que (u,v,w) est une famille liée.

Exercice n° 5 : (T)**

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(1,2,-5,3)$ et $v=(2,-1,4,7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda,\mu,-37,-3)$ appartienne à F.

Exercice n° 6 : (T)**

Montrer que $a=(1,2,3)$ et $b=(2,-1,1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c=(1,0,1)$ et $d=(0,1,1)$.

Exercice n° 7 : (T)**

1) Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0))=(1,1)$ puis $f((0,1,0))=(0,1)$ et $f((0,0,1))=(-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}f$. En fournir une base. Déterminer $\mathrm{Im}f$.

Exercice n° 8 : (I)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $[\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}f^2\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f\cap\mathrm{Im}f=\{0\}]$ et $[\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2\Leftrightarrow E=\mathrm{Ker}f+\mathrm{Im}f]$ (où $f^2=f\circ f$).

2) Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2=p$. Montrer que

$$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id-p \text{ projecteur}]$$

puis que

$$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im}p=\mathrm{Ker}(Id-p) \text{ et } \mathrm{Ker}p=\mathrm{Im}(Id-p) \text{ et } E=\mathrm{Ker}p\oplus\mathrm{Im}p].$$

3) Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\mathrm{Ker}p=\mathrm{Ker}q\Leftrightarrow p=p\circ q \text{ et } q=q\circ p]$.

4) p et q étant deux projecteurs vérifiant $p\circ q+q\circ p=0$, montrer que $p\circ q=q\circ p=0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}p$, $\mathrm{Ker}q$, $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.

Exercice n° 9 : (**)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.

1) Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.

2) A-t-on toujours l'égalité ?

3) Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + (A \cap C))$.

Exercice n° 10 : (T)**

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x, y, z, t) \in E/\ x - 2y = 0$ et $y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in E/\ x + z = y + t\}$.

1) Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.

2) Donner une base de V, une base de W et une base de $V \cap W$.

3) Montrer que $E = V + W$.

Exercice n° 11 : (***)

Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1) C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?

2) Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\ \exists (g, h) \in C^2$ tel que $f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice n° 12 : (**)

Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Exercice n° 13 : (***)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

Exercice n° 14 : (IT)**

Soient $F = \{(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ puis $G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n/\ x_1 + ... + x_n = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Exercice n° 15 : (****)

1) Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

2) Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel puis déterminer une base de E.

Exercice n° 16 : (*T)**

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

1) a, b et c étant trois réels deux à deux distincts donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x, $f_u(x) = \sin(x + u)$.

2) $A = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.

3) $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ (ici $E = (]0; +\infty[)^2$).

4) $A = (x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$.

Exercice n° 17 : (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1) Montrer que $[\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ u = w \circ v]$.

2) En déduire que $[v$ injectif $\Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w \circ v = \mathrm{Id}_E]$.

Exercice n° 18 : (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$.

2) Mêmes questions avec $g : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt \end{array}$.

Exercice n° 19 : (IT)**

1) Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$.

a) Soit F l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit φ l'application de E dans E qui à un élément u de E associe l'élément $\varphi(u)$ de E défini par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\varphi(u))_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

En utilisant l'application φ, retrouver le fait que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $E = C^{\infty}(I, \mathbb{C})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$.

a) Soit F l'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x \in I$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit φ l'application de E dans E qui à un élément f de E associe l'élément de E défini par

$$\forall x \in I,\ (\varphi(f))(x) = af''(x) + bf'(x) + cf(x).$$

En utilisant l'application φ, retrouver le fait que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice n° 20 : (IT)**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1) $C_E F$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2) a) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
b) Quel est l'espace vectoriel engendré par $F \cup G$?

Exercice n° 21 : (*IT)

Soient E un espace vectoriel puis f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

Exercice n° 22 : (*)

Soient E un espace vectoriel puis f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = f^{-1}\,(\mathrm{Ker} g)$.

Exercice n° 23 : (I)**

Soit z un nombre complexe non réel. Montrer que $(1, z)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice n° 24 : (*I)**

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice n° 25 : (I)**

Soient φ et ψ deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$\varphi \times \psi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

Exercice n° 26 : (IT)**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

