

# Planche n° 27. Fractions rationnelles

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice n° 1

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  et  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} & 2) \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)} & 3) \frac{1}{X(X-1)^2} \\
 4) \frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+1)^2} & 5) \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} & 6) \frac{X^3}{X^3 - 1} \\
 7) \frac{X^6}{(X^3 - 1)^2} & 8) \frac{1}{X^6 + 1} & 9) \frac{X^2 + 3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2} \\
 10) \frac{X^6 + 1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1} & 11) \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} &
 \end{array}$$

## Exercice n° 2

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{1}{X^n - 1} \text{ dans } \mathbb{C}(X) & 2) \frac{1}{(X-1)(X^n - 1)} \text{ dans } \mathbb{C}(X) \\
 3) \frac{n!}{(X-1)(X-2)\dots(X-n)} \text{ dans } \mathbb{R}(X) & 4) \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1} \text{ dans } \mathbb{C}(X) \text{ et } \mathbb{R}(X) \\
 5) \frac{1}{X^{2n} + 1} \text{ dans } \mathbb{C}(X) \text{ et } \mathbb{R}(X). &
 \end{array}$$

## Exercice n° 3

Soit  $U_n$  l'ensemble des racines  $n$ -èmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur)  $F = \sum_{\omega \in U_n} \frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$ .

## Exercice n° 4

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que  $F$  est paire si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont pairs. Etablir un résultat analogue pour  $F$  impaire.

## Exercice n° 5

Calculer la dérivée  $n$ -ème de  $\frac{1}{X^2 + 1}$ .

## Exercice n° 6

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

## Exercice n° 7 (Equations réciproques)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1) z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0 \text{ en posant } Z = z + \frac{1}{z} \text{ (ou autrement).} \\
 2) z^6 - 5z^5 + 5z^4 - 5z^2 + 5z - 1 = 0. \\
 3) z^7 - z^6 - 7z^5 + 7z^4 + 7z^3 - 7z^2 - z + 1 = 0.
 \end{array}$$

## Exercice n° 8

Soient  $x_1, \dots, x_8$  les zéros de  $X^8 + X^7 - X + 3$ . Calculer  $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$  (168 termes).