

Planche n° 26. Polynômes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (***)

Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ pour $n \geq 2$.

Exercice n° 2 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. On note Q le polynôme $Q = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1}$.

Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Exercice n° 3 (****I) (Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

1) Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i \sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a , déterminer $\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.

2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n , on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$).

3) Montrer que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

4) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n) .

Exercice n° 4 (**IT)

Déterminer le PGCD de $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

Exercice n° 5 (**T)

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice n° 6 (***)

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Exercice n° 7 (**)

Soit P un polynôme différent de X . Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 8 (***)

Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, P(n + km)$ est un entier divisible par m .

2) Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n .

Exercice n° 9 (*)** (Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$)

Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$.

1) On pose $P_0 = 1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (X+k)$ (on peut définir la notation $P_n = C_{X+n}^n$). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in E$.

2) Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E .

3) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n .

Exercice n° 10 (*)**

Division euclidienne de $P = \sin aX^n - \sin(na)X + \sin((n-1)a)$ par $Q = X^2 - 2X \cos a + 1$, a réel donné, $n \geq 2$.

Exercice n° 11 (**I)** (Théorème de LUCAS.)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que pour toute racine z de P' , il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de somme égale à 1 tels que $z = \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k$ où z_1, \dots, z_n sont les n racines distinctes ou confondues de P dans \mathbb{C} (on dit que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P ou encore que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\frac{P'}{P}$.

Exercice n° 12 (*)**

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 2X^3 \cos a + 1$ où a est un réel donné dans $[0, \pi]$.

Exercice n° 13 (*T)**

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice n° 14 (*I)**

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Exercice n° 15 (T)**

Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

Exercice n° 16 (*T)**

Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq 5}$ la famille des racines de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calculer $\sum_{k=1}^5 \frac{a_k + 2}{a_k - 1}$.

Exercice n° 17 ()**

Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système :
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$$

Exercice n° 18 (T)**

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice n° 19 ()**

1) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$, dont les coefficients a_0, \dots, a_n , sont des entiers relatifs.

Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $\text{PGCD}(p, q) = 1$ puis $r = \frac{p}{q}$.

Montrer que si $P(r) = 0$, alors p divise a_0 et q divise a_n .

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4 + X^3 + 15X^2 - 20X + 4$.

Exercice n° 20 (*)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ est divisible par $2X^3 - 3X^2 + X$ puis déterminer le quotient.

Exercice n° 21 (I)**

1) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer deux polynômes U et V tels que $UX^n + V(1-X)^n = 1$ et $\deg(U) < n$ et $\deg(V) < n$.

2) Plus généralement, si n et m sont deux entiers naturels non nuls, déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n + V(1-X)^m = 1$ et $\deg(U) < m$ et $\deg(V) < n$.

Exercice n° 22 (I)**

Soit P un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1) a) Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P' .

b) Le résultat persiste-t-il si on suppose simplement que les racines de P sont simples mais pas nécessairement réelles?

2) Montrer que si P est scindé sur \mathbb{R} , il en est de même de P' .

Exercice n° 23 (*)**

Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin \frac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

Exercice n° 24 (*)**

Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système
$$\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} .$$

Exercice n° 25 (*)**

Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ soient en progression arithmétique.

Exercice n° 26 (*)**

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - 21z + 8 = 0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n° 27 (*)**

Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Exercice n° 28 (*)**

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.

Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

Exercice n° 29 (I)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

1) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right)$.

2) Montrer que, pour tout réel α , $\prod_{k=0}^{n-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos \alpha + 1) = 2(1 - \cos(n\alpha))$ (questions indépendantes.)