Planche n° 26. Polynômes : corrigé

Exercice n° 1

Soit $n \geqslant 2$.

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}\left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}\right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{-2ik\pi/n}\right).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\ldots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\displaystyle\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Il reste à calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont les $n-1$ racines n-èmes de 1 distinctes de 1.
Puisque $X^n - 1 = (X-1)\left(1 + X + \ldots + X^{n-1}\right)$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Par suite,

$$1 + X + \ldots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{-2ik\pi/n}\right) = P.$$

En particulier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = P(1) = 1 + 1 \ldots + 1 = n$.

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$

Exercice n° 2

Soit $n \geqslant 2$. Tout d'abord

$$Q = (1 + X + \ldots + X^n)' = \left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - \left(X^{n+1}-1\right)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1)}.$$

Mais, $X^n - 1 = (X-1)\left(1 + X + \ldots + X^{n-1}\right)$ et d'autre part $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega_k)$. On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

En particulier, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega_k) = 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1} = n$ ou encore $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1) = (-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2}\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}(n+1)}{2}.}$$

Exercice n° 3

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel a,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i\sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} \cos^{2p+1-j} a (i\sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \mathrm{Im}\left(e^{i(2p+1)a}\right) = \sum_{j=0}^{p} \binom{2p+1}{2j+1} \cos^{2(p-j)} a (-1)^j \sin^{2j+1} a.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, en posant $a = \dfrac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \sum_{j=0}^{p} \binom{2p+1}{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \dfrac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de $(*)$ par $\sin^{2p+1} \dfrac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{2p+1}{2j+1} \mathrm{cotan}^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\mathrm{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$. Or, sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction $x \mapsto \mathrm{cotan}\, x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \mathrm{cotan}^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces p nombres deux à deux distincts sont racines du polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{2p+1}{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-\binom{2p+1}{3}}{\binom{2p+1}{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} \left(1 + \mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2) Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3) Pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. f et g sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[)$, $f'(x) = 1 - \cos x$ et $g'(x) = \tan^2 x)$. f' et g' sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc f et g sont strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin x < x < \tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \text{cotan}\, x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ puis $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$.

4) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \left(\frac{2p+1}{k\pi}\right) < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^{p} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^2}{\pi^2 k^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)}{3},$$

puis

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} < u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice n° 4

- $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 = (X^6 + 8X^3 + 7) - (7X^4 + 7X) = (X^3 + 1)(X^3 + 7) - 7X(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(X^3 - 7X + 7)$.
- $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7 = 3X^2(X^3 + 1) - 7(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(3X^2 - 7)$. Donc,

$$\text{PGCD}\left(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7, 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7\right) = \left(X^3 + 1\right) \text{PGCD}\left(X^3 - 7X + 7, 3X^2 - 7\right).$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\left(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3 - 7\left(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}\right) + 7 = -\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + 7 \neq 0$.

Les polynômes $(X^3 - 7X + 7)$ et $(3X^2 - 7)$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ et sont donc premiers entre eux. Donc,

$$\boxed{\text{PGCD}\left(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7, 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7\right) = X^3 + 1.}$$

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2 + X + 1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X]) \\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.\end{aligned}$$

- Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 1 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
- Si $n \in 2 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
- Si $n \in 3 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 4 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.

- Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.

En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z}) \cup (5+6\mathbb{Z})$.

Exercice n° 6

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.

Tout d'abord, pour tout réel x, $\displaystyle\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinômes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geqslant 0)$.

Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda}\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \displaystyle\prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \displaystyle\prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$ puis

$$P = A^2Q_1Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Exercice n° 7

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair. Sinon, posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left((P(X))^k - X^k\right) + (P(X) - X)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\left((P(X))^k - X^k\right) + (P(X) - X).\end{aligned}$$

Mais, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)\left((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + ... + X^{k-1}\right)$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 8

1) Posons $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{l} a_iX_i$ où $l \geqslant 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$. D'après la formule du binôme de Newton, il existe des entiers relatifs K_i, $0 \leqslant i \leqslant l$, tels que

$$P(n+km) = \sum_{i=0}^{l} a_i(n+km)^i = \sum_{i=0}^{l} a_i(n^i + K_im) = \sum_{i=0}^{l} a_in^i + Km = m + Km = m(K+1),$$

où K est un entier relatif. $P(n+km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.

2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est premier.

Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geqslant 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k, $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Exercice n° 9

1) Déjà, P_0 est dans E.

Soit n un naturel non nul. $P_n = \dfrac{1}{n!}(X+1)...(X+n)$ et donc, si k est élément de $[\![-n,-1]\!]$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Si k est un entier positif, $P_n(k) = \dfrac{1}{n!}(k+1)...(k+n) = \dbinom{n+k}{n} \in \mathbb{Z}$.

Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)...(k+n) = (-1)^n\frac{1}{n!}(-k-1)...(-k-n) = (-1)^n\binom{-k-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z},\ P_n(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2) Une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est donc dans E.

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k). Puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n, $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire que tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$).et donc, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire que tout polynôme s'écrit donc manière unique comme combinaison linéaire des P_k, $k \in \mathbb{N}$).

Soit $n = \deg P$. Il existe $n+1$ nombres complexes a_0,..., a_n tels que $P = a_0P_0 + ... + a_nP_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.

- La phrase « $P(-1)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : a_0 est dans $\mathbb{Z}$.
- La phrase « $P(-2)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - a_1$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_1 est dans $\mathbb{Z}$.
- La phrase « $P(-3)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_2 est dans $\mathbb{Z}$...
- La phrase « $P(-(k+1))$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k$ est dans $\mathbb{Z}$ et si par hypothèse de récurrence, a_0,..., a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.

Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k.

Exercice n° 10

On prend $n \geqslant 2$ (sinon tout est clair).
$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0 \times Q$.

2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, d'après la formule de Moivre

$$\begin{aligned}
P(e^{ia}) &= \sin a(\cos(na) + i\sin(na)) - \sin(na)(\cos a + i\sin a) + \sin((n-1)a) \\
&= \sin((n-1)a) - (\sin(na)\cos a - \cos(na)\sin a) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P. P est donc divisible par Q.

$$\begin{aligned}
P &= P - P(e^{ia}) = \sin a\left(X^n - e^{ina}\right) - \sin(na)\left(X - e^{ia}\right) = \left(X - e^{ia}\right)\left(\sin a\sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k}e^{ika} - \sin(na)\right) \\
&= \left(X - e^{ia}\right)S.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a\sum_{k=0}^{n-1} e^{ika}\left(X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}\right) \\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{k=0}^{n-2} e^{ika}\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j}e^{-ija}\right) \\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{k=0}^{n-2}\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j}e^{i(k-j)a}\right) = \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{l=0}^{n-2}\left(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a}\right)X^{n-2-l} \\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{l=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)a}\right)X^{n-2-l}
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)}a = e^{-ila}\frac{1-e^{2i(l+1)a}}{1-e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a(X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}X^{n-2-l} = (X-e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\sin((l+1)a)X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X-e^{ia})(X-e^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a)X^{n-2-k} = (X^2-2X\cos a+1)\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a)X^{n-2-k}.$$

Exercice n° 11

Soit P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.
Posons $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)...(X-z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(X-z_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{P}{X-z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{z-z_k}}{|z-z_k|^2} = \overline{\sum_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{|z-z_k|^2}} \quad (*).$$

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $\lambda_k = \dfrac{\frac{1}{|z-z_k|^2}}{\sum_{j=1}^{n}|z-z_j|^2}$. Chaque λ_k est un réel strictement positif et de plus

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|^2}}{\sum_{j=1}^{n}|z-z_j|^2} = 1.$$

En conjuguant les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient $\left(\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{|z-z_j|^2}\right)z = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{|z-z_k|^2}z_k$ et donc,

$$z = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k.$$

Exercice n° 12

$$\begin{aligned}P &= X^6-2X^3\cos a+1 = \left(X^3-e^{ia}\right)\left(X^3-e^{-ia}\right)\\
&= \left(X-e^{ia/3}\right)\left(X-je^{ia/3}\right)\left(X-j^2e^{ia/3}\right)\left(X-e^{-ia/3}\right)\left(X-je^{-ia/3}\right)\left(X-j^2e^{-ia/3}\right)\\
&= \left(X^2-2X\cos\frac{a}{3}+1\right)\left(X^2-2X\cos\left(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1\right)\left(X^2-2X\cos\left(\frac{a}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)+1\right).\end{aligned}$$

Il reste à se demander : 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.

Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.

Les cas particuliers sont donc ($\dfrac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = 0$) et ($\dfrac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = \pi$) et ($\dfrac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0,\pi]$).

1er cas. Si $a = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X-1)^2(X^2+X+1)^2.$$

2ème cas. Si $a = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0,\pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. D'autre part, e^{ia} et e^{-ia} sont distincts et donc n'ont pas de racine cubique en commun. Les trois facteurs de degré 2 sont deux à deux distincts. Dans ce cas,

$$P = \left(X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{a+2\pi}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{a-2\pi}{3} + 1\right).$$

Exercice n° 13

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P + 10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)' = P'$ d'ordre au moins deux.
De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P' = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda\left(X^2-4\right)^2 = \lambda\left(X^4 - 8X^2 + 16\right)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2/\ P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $P = \lambda\left(\dfrac{1}{5}X^5 - \dfrac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu$ avec $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P \text{ solution} &\Leftrightarrow P + 10 \text{ divisible par } (X+2)^3 \text{ et } P - 10 \text{ est divisible par } (X-2)^3\\
&\Leftrightarrow P(-2) + 10 = 0 = P'(-2) = P''(-2) \text{ et } P(2) + 10 = 0 = P'(2) = P''(2)\\
&\Leftrightarrow P(-2) = -10 \text{ et } P(2) = 10\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda\left(-\dfrac{32}{5} + \dfrac{64}{3} - 32\right) + \mu = -10\\ \lambda\left(\dfrac{32}{5} - \dfrac{64}{3} + 32\right) + \mu = 10 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) = 10\\
&\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}
\end{aligned}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P = \dfrac{75}{128}\left(\dfrac{1}{5}X^5 - \dfrac{8}{3}X^3 + 16X\right) = \dfrac{15}{128}X^5 - \dfrac{25}{16}X^3 + \dfrac{75}{8}X$.

Exercice n° 14

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont 0 et 1 car $\lambda = \lambda\lambda \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1\}$.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Alors, a^2, a^4, a^8..., sont encore racines de P. Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $\left(a^{(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a = 0$ ou $|a| = 1$ car si $|a| \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, la suite $\left(\left|a^{(2^n)}\right|\right)$ est strictement monotone et en particulier les $a^{(2^n)}$ sont deux à deux distincts.

De même, si a est racine de P alors $(a-1)^2$ l'est encore mais aussi $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., ce qui impose $a = 1$ ou $|a-1| = 1$.

En résumé,

$$\begin{aligned}
(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) &\Rightarrow ((a = 0 \text{ ou } |a| = 1) \text{ et } (a = 1 \text{ ou } |a-1| = 1))\\
&\Rightarrow (a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } |a| = |a-1| = 1).
\end{aligned}$$

Maintenant, $|a| = |a-1| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$ et $|a| = |a-1| \Leftrightarrow a \in \mathcal{C}((0,0),1) \cap \text{med}[(0,0),(1,0)] = \{-j,-j^2\}$.
Donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution, il existe K, α, β, γ, K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que

$$P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma = KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$$

($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité puisque P est à coefficients réels).

Réciproquement, si $P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$\begin{aligned} P(X^2) &= KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X^4-X^2+1)^\gamma = KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X^4+2X^2+1-3X^2)^\gamma \\ &= KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X)P(X+1) &= KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma \\ &= K^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha(X^2-X+1)^\gamma(X^2+X+1)^\gamma. \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P = 0$ ou $K = 1$ et $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$.

Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2-X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Exercice n° 15

a est solution du problème si et seulement si $X^5 - 209X + a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 1$. La division euclidienne de $X^5 - 209X + a$ par $X^2 + \alpha X + 1$ s'écrit

$$X^5 - 209X + a = (X^2+\alpha X+1)(X^3-\alpha X^2+(\alpha^2-1)X-(\alpha^3-2\alpha)) + (\alpha^4-3\alpha^2-208)X + a + (\alpha^3-2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}/ \left\{\begin{array}{l} \alpha^4-3\alpha^2-208=0 \\ a=-\alpha^3+2\alpha \end{array}\right.$. Mais,

$$\alpha^4-3\alpha^2-208=0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13,16\} \Leftrightarrow \alpha \in \left\{-4,4,i\sqrt{13},-i\sqrt{13}\right\}$$

et la deuxième équation fournit $a \in \left\{56,-56,15i\sqrt{13},-15i\sqrt{13}\right\}$.

Exercice n° 16

On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1} = \sum_{k=1}^{5}\left(1+\frac{3}{a_k-1}\right) = 5 - 3\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{1-a_k} = 5 - 3\frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3\times\frac{12}{1} = -31.$$

Exercice n° 17

Notons (S) le système proposé.

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \dfrac{xy+xz+yz}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sigma_1=1,\ \sigma_2=\sigma_3=-4 \\ &\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } X^3-X^2-4X+4=0 \\ &\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } (X-1)(X-2)(X+2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\} \end{aligned}$$

Exercice n° 18

Le polynôme nul est solution. Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 1 ne convient pas.
Soit P un polynôme non nul solution de degré $n \geqslant 2$. Alors $n = n-1+n-2$ et donc $n = 3$. Posons $P = aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b)\\
&\Leftrightarrow (18a^2 - 8a)X^3 + (18ab - 4b)X^2 + (4b^2 + 6ac - 2c)X + 2bc - d = 0\\
&\Leftrightarrow 18a^2 - 8a = 18ab - 4b = 4b^2 + 6ac - 2c = 2bc - d = 0\\
&\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0.
\end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Exercice n° 19

1)

$$P(r) = 0 \Rightarrow a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_np^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}\right)\\ a_0q^n = p\left(-a_np^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \ldots - a_1q^{n-2}\right)\end{array}\right. .$$

La première égalité montre que q divise a_np^n. Mais q est premier à p et donc q est premier à p^n. D'après le théorème de Gauss, q divise a_n.
De même, la deuxième égalité montre que p divise a_0.

2) 0 n'est pas racine de P.
Soit $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$) une éventuelle racine racine rationnelle de P. Alors, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ et q est élément de $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ou encore r est élément de $\left\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}\right\}$.

Réciproquement, on trouve $P\left(\frac{2}{3}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. P est donc divisible par

$$12\left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X - \frac{1}{4}\right) = (3X - 2)(4X - 1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Plus précisément, $P = \left(12X^2 - 11X + 2\right)\left(X^2 + X + 2\right) = (3X - 2)(4X - 1)\left(X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}\right)$.

Exercice n° 20

Pour $n \geqslant 0$, posons $P_n = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X - 1)(2X - 1) = 2X^3 - 3X^2 + X$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le quotient est nul. Si $n = 2$, le quotient vaut -2.

Soit $n \geqslant 3$. On met successivement $2X - 1$ puis $X - 1$ puis X en facteur :

$$
\begin{aligned}
P_n &= \left((X-1)^2\right)^n - \left(X^2\right)^n + (2X-1) = \left((X-1)^2 - X^2\right)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + (2X-1)\\
&= (2X-1)\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1\right) = (2X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2}\right)\\
&= (2X-1)\left(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - (X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k\right)\\
&= (2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1}X^k\right)\\
&= (2X-1)(X-1)\left(-\left(\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}\right) - \left(\sum_{k=1}^{2n-1}X^k\right) - 1 - (X-1)^{2n-3}\right)\\
&= (2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^k - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}\binom{2n-3}{k}X^k\right)\\
&= X(2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^{k}X^{k-1}\right).
\end{aligned}
$$

Exercice n° 21

1)

$$
\begin{aligned}
1 &= (X + (1-X))^{2-1} = \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= (1-X)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} + X^n\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}
$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^n = 1$. De plus, pour $n \leqslant k \leqslant 2n-1$, $\deg\left(X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}\right) = k-n+2n-1-k = n-1 < n$ et donc $\deg(U) < n$ et de même pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\deg\left(X^k(1-X)^{n-1-k}\right) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

2)

$$
\begin{aligned}
1 &= (X + (1-X))^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= (1-X)^m\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} + X^n\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}.
\end{aligned}
$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. De plus, pour $n \leqslant k \leqslant n+m-1$, $\deg\left(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}\right) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\deg\left(X^k(1-X)^{n-1-k}\right) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

Exercice n° 22

Soit $n \geqslant 2$ le degré de P.

1) a) Si P admet n racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins $n-1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P'. Mais, puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de P', nécessairement toutes réelles et simples.

b) Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P = X^3-1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais $P' = 3X^2$ admet une racine double.

2) Séparons les racines simples et les racines multiples de P. Posons $P = (X-a_1)\ldots(X-a_k)(X-b_1)^{\alpha_1}\ldots(X-b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k=0$ ou $l=0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

P s'annule déjà en $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit $k+l-1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j. D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre $\alpha_j - 1$ de P'. On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à $k+l-1+\displaystyle\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j-1) = k + \left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\right) - 1 = n-1$ racines réelles et c'est fini.

Exercice n° 23

Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k = \sin\dfrac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}
P &= \left(X-\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(X-\sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(X-\sin\frac{3\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= \left(X^2-\sin^2\frac{\pi}{7}\right)\left(X^2-\sin^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(X^2-\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= \left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right)\left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\right)\left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}Q\left(-2X^2+1\right)
\end{aligned}$$

où $Q(Y) = \left(\cos\dfrac{2\pi}{7}-Y\right)\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}-Y\right)\left(\cos\dfrac{8\pi}{7}-Y\right)$.

Posons $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)\left(\omega^3+\omega^4\right) = \frac{1}{8}\left(\omega^6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{15}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega\right) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4}\left(\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)+\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^3+\omega^4\right)+\left(\omega^3+\omega^4\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6\right) = -\frac{1}{2}$$

Donc, $Q = \dfrac{1}{8} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)Y + \left(-\dfrac{1}{2}\right)Y^2 - Y^3 = \dfrac{1}{8}\left(-8Y^3-4Y^2+4Y+1\right)$ puis,

$$P = \frac{1}{64}\left(-8\left(-2X^2+1\right)^3-4\left(-2X^2+1\right)^2+4\left(-2X^2+1\right)+1\right) = \frac{1}{64}\left(64X^6-112X^4+56X^2-7\right).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les $\sin\dfrac{k\pi}{7}$, $k\in\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ est $64x^6-112x^4+56x^2-7=0$.

Maintenant, si $r = \dfrac{p}{q}$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1, -1, 7, -7\}$ et q est élément de $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Réciproquement, on vérifie qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Exercice n° 24

Si (x, y, z) est solution du système proposé noté (S), alors x, y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x = y$ alors $7 = y^2 + yz + z^2 = x^2 + xz + z^2 = 13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^3 - z^3 = 7(y - z) \\ z^3 - x^3 = 13(z - x) \\ x^3 - y^3 = 3(x - y) \end{array}\right. .$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x + 4y + 6z = 0$ ou encore $-5x + 2y + 3z = 0$. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}(5x - 3z) \\ \left(\dfrac{1}{2}(5x - 3z)\right)^2 + \dfrac{1}{2}(5x - 3z)z + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}(5x - 3z)x + \left(\dfrac{1}{2}(5x - 3z)\right)^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}(5x - 3z) \\ 25x^2 - 20xz + 7z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ 39x^2 - 36xz + 9z^2 = 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}(5x - 3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 25x^2 - 20(13 - x^2 - z^2) + 7z^2 = 28 \\ 39x^2 - 36(13 - x^2 - z^2) + 9z^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}(5x - 3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 5x^2 + 3z^2 = 32 \end{array}\right.$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x = 0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 = \dfrac{1}{3}\left(32 - 5x^2\right) \\ xz = 13 - x^2 - \dfrac{1}{3}\left(32 - 5x^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{2x^2 + 7}{3x} \\ \dfrac{\left(2x^2 + 7\right)^2}{9x^2} = \dfrac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit $\left(2x^2 + 7\right)^2 = 3x^2\left(32 - 5x^2\right)$ puis $19x^4 - 68x^2 + 49 = 0$ puis $x^2 = \dfrac{34 \pm 15}{19}$ D'où les solutions $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \sqrt{\dfrac{49}{19}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{49}{19}}$. Les quatre triplets solutions du système : $(1, -2, 3)$, $(-1, 2, -3)$, $\left(\dfrac{7}{\sqrt{19}}, \dfrac{1}{\sqrt{19}}, \dfrac{11}{\sqrt{19}}\right)$ et $\left(-\dfrac{7}{\sqrt{19}}, -\dfrac{1}{\sqrt{19}}, -\dfrac{11}{\sqrt{19}}\right)$.

Exercice n° 25

Posons $P = X^4 - 4X^3 - 36X^2 + \lambda X + \mu$.

$$
\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \text{ les racines de P soient } a, a+r, a+2r, a+3r\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}4a+6r=4\\ a(3a+6r)+(a+r)(2a+5r)+(a+2r)(a+3r)=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}2a+3r=2\\ 6a^2+18ra+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}a=1-\dfrac{3}{2}r\\ 6\left(1-\dfrac{3}{2}r\right)^2+18\left(1-\dfrac{3}{2}r\right)r+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}-\dfrac{5}{2}r^2+42=0\\ a=1-\dfrac{3}{2}r\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r=2\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ puis $a=1-3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ puis les racines $z_1=1-3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $z_2=1-\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $z_3=1+\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ et $z_4=1+3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\mu=z_1z_2z_3z_4=\left(1-3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)=\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1-\frac{21}{5}\right)=\frac{2944}{25},$$

et

$$
\begin{aligned}
\lambda&=\left(1-3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1-\frac{21}{5}\right)+\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1-\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+\left(1-\frac{21}{5}\right)\left(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\\
&=2\left(1-\frac{21}{5}\right)+2\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)=2\left(2-10\frac{21}{5}\right)=-80
\end{aligned}
$$

Exercice n° 26

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$X^4-21X+8=(X^2+aX+1)(X^2+bX+8)=X^4+(a+b)X^3+(9+ab)X^2+(8a+b)X+8\ (*)$$

$(*)\Leftrightarrow b=-a$ et $ab=-9$ et $8a+b=-21\Leftrightarrow a=-3$ et $b=3$. Ainsi,

$$X^4-21X+8=\left(X^2-3X+1\right)\left(X^2+3X+8\right)=\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-3+i\sqrt{23}}{2}\right)\left(X-\frac{-3-i\sqrt{23}}{2}\right).$$

Exercice n° 27

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. On veut calculer S_4.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $x_i^3 + 2x_i - 1 = 0$ et donc $x_i^4 + 2x_i^2 - x_i = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4 + 2S_2 - S_1 = 0$ et donc

$$\begin{aligned} S_4 &= -2S_2 + S_1 = -2\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right) + (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= -2\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right) + \sigma_1 = -2(-2 \times 2) = 8. \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8.}$$

Exercice n° 28

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors z_1, z_2, $2_a - z_1$, $2a - z_2$ et si $Q = P(X + a)$ alors $Q(-a + z_1) = Q(a - z_1) = Q(-a + z_2) = Q(a - z_2) = 0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4 + \alpha X^2 + \beta$ ou enfin que

$$P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta.$$

Mais alors a est racine de $P' = 4(X - a)^3 + 2\alpha(X - a)$ et de $P^{(3)} = 24(X - a)$.

Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a. $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)} = 24(X - a)$ puis en intégrant $P'' = 12(X - a)^2 + \lambda$ puis $P' = 4(X - a)^3 + \lambda(X - a) + \mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu = 0$ et donc $P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta$. Donc, le polynôme $Q = P(X + a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1 = a - z_1$, $Z_2 = z1 - a$, $Z_3 = a - z_2$, $Z_4 = z_2 - a$ et on a bien $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Exercice n° 29

Soit $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = X^n - 1$ (où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$)

1) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4 - \omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2 - \omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right) = 2^n + 1.}$$

2)

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{ia} - \omega_k\right)\left(e^{-ia} - \omega_k\right) = P(e^{ia})P(e^{-ia}) = (e^{ina} - 1)(e^{-ina} - 1) \\ &= 2 - e^{ina} - e^{-ina} = 2(1 - \cos na). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1\right) = 2(1 - \cos na).}$$

