

Planche n° 23. Comparaison des fonctions en un point

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x|^{\cos x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) \right)^n$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\ln|x|}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \times e^{1/(1-\sin x)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow e, x < e} (\ln x)^{\ln(e-x)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x - x^2) + x - \ln x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(a + \frac{1}{x})}{\cos a} \right)^x \quad (\text{où } \cos a \neq 0)$$

Exercice n° 2

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

$$1) \frac{1}{1 - x^2 - x^3} \quad (\text{ordre 7 en 0})$$

$$2) \frac{1}{\cos x} \quad (\text{ordre 7 en 0})$$

$$3) \operatorname{Arccos} \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \quad (\text{ordre 3 en 0})$$

$$4) \tan x \quad (\text{ordre 3 en } \frac{\pi}{4})$$

$$5) (\operatorname{ch} x)^{1/x^2} \quad (\text{ordre 2 en 0})$$

$$6) \tan^3 x (\cos(x^2) - 1) \quad (\text{ordre 8 en 0})$$

$$7) \frac{\ln(1+x)}{x^2} \quad (\text{ordre 3 en 1})$$

$$8) \operatorname{Arctan}(\cos x) \quad (\text{ordre 5 en 0})$$

$$9) \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad (\text{ordre 2 en 0})$$

$$10) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x} \quad (\text{ordre 5 en 0})$$

$$11) \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \quad (\text{ordre 10 en 0})$$

$$12) \ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) \quad (\text{ordre 100 en 0})$$

$$13) \tan \sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)} \quad (\text{ordre 3 en } \pi)$$

Exercice n° 3

Soit $0 < a < b$. Etude complète de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$.

Exercice n° 4

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1}$.

Exercice n° 5

Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$ en à peine plus de temps.

Exercice n° 6

1) Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1$.

2) Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2 - 6x$

3) Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x}$.

4) Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\operatorname{th} x}$.

5) Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

Exercice n° 7

Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$.

Exercice n° 8

- 1) Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$.
- 2) Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$.

Exercice n° 9

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

- 1) Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
- 2) Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Exercice n° 10

Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- 1) Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
- 2) a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n .

Exercice n° 11

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 12

- 1) Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
- 2) Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice n° 13

- 1) Montrer que l'équation $x + \ln x = k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_k .
- 2) Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k = ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Exercice n° 14

Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

- 1) Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Exercice n° 15

Etude au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin } x}$ (existence d'une tangente?)

Exercice n° 16

- 1) La fonction $x \mapsto \text{Arccos } x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0? d'ordre 1?
- 2) Equivalent simple de $\text{Arccos } x$ en 1.

Exercice n° 17

- 1) Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
- 2) Soit α_k le k -ème coefficient. Montrer que α_k est le nombre de solutions dans \mathbb{N}^2 de l'équation $p + 2q = k$.