

Planche n° 23. Comparaison des fonctions en un point : corrigé

Exercice n° 1

1) Si $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$).

$$\ln(\sin x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \sin x - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2} = -\frac{(2x - \pi)^2}{8}.$$

Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x - \pi} \sim -\frac{2x - \pi}{8}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{2x - \pi} = 0$ puis que $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^0 = 1$.

2)

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x \ln|\tan x| \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\cos x \ln|\cos x|$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln|\tan x| \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\cos x \ln|\cos x| = \lim_{u \rightarrow 0} -u \ln u = 0$ puis $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^0 = 1$.

3) $\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type 1^∞).

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{6n+1} &= \sin\left(\frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Puis,

$$n \ln\left(\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1}\right) = n \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o(1),$$

et donc $\left(\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{3}\pi/24}$.

4) $\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x| \times \ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \ln|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|} = e^{\ln|x| \ln(\cos x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$.

5) Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1 - \sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \operatorname{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} &= \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\left(-\frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 + o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{h^2}, \end{aligned}$$

et donc, $\ln|\sin h| + \frac{1}{1 - \cos h} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{h^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} +\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pi/2, x < \pi/2} \cos x \times e^{1/(1-\sin x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2, x > \pi/2} \cos x \times e^{1/(1-\sin x)} = -\infty$.

6) Pour $x \in \mathbb{R}$, $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z} \right].$$

Pour $x \notin \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} = \frac{(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2 \cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3$.

7)

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + o(x)}{1 + x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + o(x))(1 - x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x).$$

Puis,

$$\frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(1 + o(x))}{x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{o(x)}{x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{o(1)}{1 + o(1)} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x} = e^0 = 1$.

8)

$$\ln(\ln x) \underset{x \rightarrow e^-}{\sim} \ln x - 1 = \ln \frac{x}{e} \underset{x \rightarrow e^-}{\sim} \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e - x),$$

puis,

$$\ln(e - x) \ln(\ln x) \underset{x \rightarrow e^-}{\sim} -\frac{1}{e}(e - x) \ln(e - x) \underset{x \rightarrow e^-}{\rightarrow} 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x) \ln(\ln x)} \underset{x \rightarrow e^-}{\rightarrow} 1$.

9) $x \ln x \underset{x \rightarrow 1^+}{\rightarrow} 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} x \ln x \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} 1 \times (x - 1) = x - 1.$$

Ensuite,

$$\ln \left(1 - \sqrt{x^2 - 1} \right) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} -\sqrt{x^2 - 1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement,

$$\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{x - 1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x-1} \underset{x \rightarrow 1^+}{\rightarrow} 0.$$

10)

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(\frac{e^x}{2} \right) = x - \ln 2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x,$$

et donc

$$\frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \times x}{x^2} = 1.$$

11)

$$\ln(x - x^2) + x - \ln x = x + \ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (\sin x)^x &= e^{x \ln(\sin x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} e^{x \ln(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} e^{x \ln x} e^{x \ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} x^x e^{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} x^x \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right), \end{aligned}$$

et

$$x^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} e^{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \ln x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} e^{x \ln x} e^{-\frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} x^x \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} (\sin x)^x - x^{\sin x} &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} x^x \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x^x \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} x^x \left(\frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1 \times \frac{x^3 \ln x}{6} = \frac{x^3 \ln x}{6}, \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x - x^2) + x - \ln x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^3 \ln x / 6}{-x^2 / 2} = -\frac{x \ln x}{3} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0.$$

12)

$$\ln(x + 1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x + 1)}{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x \ln\left(\frac{\ln(x + 1)}{\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \ln\left(1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc, $\left(\frac{\ln(x + 1)}{\ln x}\right)^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^0 = 1.$

13) Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \underset{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &\underset{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}}{\rightarrow} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (\operatorname{Arcsin})' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

14)

$$\begin{aligned} x \ln\left(\frac{\cos\left(a + \frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) &= x \ln\left(\cos \frac{1}{x} - \tan a \sin \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \ln\left(1 - \frac{\tan a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(-\frac{\tan a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\tan a + o(1), \end{aligned}$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos\left(\alpha + \frac{1}{x}\right)}{\cos \alpha} \right)^x = e^{-\tan \alpha}$.

Exercice n° 2

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2-x^3} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x^2+x^3) + (x^2+x^3)^2 + (x^2+x^3)^3 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + x^4 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \right) + x^6 \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7). \end{aligned}$$

3) Remarques initiales.

- Pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$, on a $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$ et donc la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).
- $\frac{x}{\tan x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ et donc $\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).
- La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (et à priori, c'est mal parti).
- La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

Recherche d'un équivalent simple de $\operatorname{Arccos} x$ en 1 à gauche.

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\operatorname{Arccos} x \rightarrow 0$ et donc,

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Déterminons alors un équivalent simple de $\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus).

Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x) \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \left(\frac{\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right) \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \right)^{1/2} \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + o(x^5) \right)^{1/2} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{x^2}{15} + o(x^2) \right)^{1/2} \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^{-1/2} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3) \right) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

4) La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG.

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$ puis $(\tan)' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 2$. Ensuite, pour tout x non dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $(\tan)''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$ et $(\tan)'' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 4$. Enfin, pour tout x non dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 16$. Finalement,

$$\tan x \underset{x \rightarrow \pi/4}{=} 1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + o \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right).$$

5)

$$\frac{1}{x^2} \ln(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2),$$

et donc

$$(\operatorname{ch} x)^{1/x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{1/2} e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12} x^2 + o(x^2).$$

6)

$$\tan^3 x (\cos(x^2) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x^2))^3 \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x^3 + o(x^4)) \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^7}{2} + o(x^8).$$

7) On pose $h = x - 1$ ou encore $x = 1 + h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\ln 2 + \ln \left(1 + \frac{h}{2} \right) \right) \left(1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2} h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6} h^3 + o(h^3) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3) \right) (1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2 \right) h + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8} \right) h^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24} \right) h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2 \right) (x-1) + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8} \right) (x-1)^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24} \right) (x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

8) Pour x réel, posons $f(x) = \text{Arctan}(\cos x)$. f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour x réel, $f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{2 - x^2 + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^{-1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\text{Arctan}(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan}(\cos 0) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

9) Pour $x > -1$, posons $f(x) = \text{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \times \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\ &= \frac{1}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} \left(1 + \frac{2x}{3} \right)^{-1} (1+x)^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2x}{3} + o(x) \right) \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) \left(1 - \frac{x}{4} + o(x) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) x + o(x) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{17x}{12} + o(x) \right). \end{aligned}$$

f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\text{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} x - \frac{17}{144\sqrt{2}} x^2 + o(x^2).$$

10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \binom{-1}{-2} (-x^2) + \frac{\binom{-1}{-2} \binom{-3}{-2}}{2} (-x^2)^2 + \frac{\binom{-1}{-2} \binom{-3}{-2} \binom{-5}{-2}}{6} (-x^2)^3 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + o(x^7). \end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{Arcsin} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8)$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} + o(x^7)\right)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} + o(x^7)\right)^{-2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 - 2\left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112}\right) + 3\left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3 + o(x^7)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{20} + \frac{1}{12}\right)x^2 + \left(-\frac{5}{56} + \frac{3}{40} - \frac{1}{54}\right)x^4 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{15} - \frac{31x^4}{945} + o(x^5). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{31x^4}{945} + o(x^5).$$

11) Pour x réel, posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit F la primitive de f

qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

g est définie sur \mathbb{R} et, pour x réel $g(x) = F(x^2) - F(x)$. g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}},$$

puis,

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x \left(1 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^8)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^9)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10}).$$

12)

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(e^x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(e^x) + \ln \left(1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \ln \left(1 - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}). \end{aligned}$$

13) Posons $h = x - \pi$ ou encore $x = \pi + h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)} &= \sqrt[3]{4(\pi^3 + (\pi + h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3 + 12\pi^2h + 12\pi h^2 + 4h^3} \\ &= 2\pi \left(1 + \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right)^{1/3} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} \right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{3h}{2\pi} \right)^3 + o(h^3) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\pi + h + h^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) + h^3 \left(\frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{5}{12\pi^2} \right) + o(h^3) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\pi + h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3), \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}\tan\left(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}\right) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \tan\left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3) = h + \frac{h^2}{2\pi} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right)h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

Finalement, $\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x \rightarrow \pi}{=} (x-\pi) + \frac{1}{2\pi}(x-\pi)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right)(x-\pi)^3 + o((x-\pi)^3)$.

Exercice n° 3

Puisque $a > 0$, $b > 0$ et que pour tout réel x , $\frac{a^x + b^x}{2} > 0$, f est définie sur \mathbb{R}^* , et pour $x \neq 0$, $f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(a^x + b^x)}$.

Etude en 0.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2}(a^x + b^x)\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}(e^{x \ln a} + e^{x \ln b})\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + x \ln \sqrt{ab} + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} - \frac{1}{2}(x \ln \sqrt{ab})^2 + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln \sqrt{ab} + \frac{1}{8}(\ln^2 a - 2 \ln a \ln b + \ln^2 b)x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln \sqrt{ab} + \frac{x^2}{8} \ln^2 \frac{a}{b} + o(x^2).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\ln \sqrt{ab} + \frac{x}{8} \ln^2 \frac{a}{b} + o(x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{ab} \left(1 + \frac{x}{8} \ln^2 \frac{a}{b} + o(x)\right).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8} \ln^2 \frac{a}{b} (> 0)$.

Etude en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2}(a^x + b^x)\right) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left(\ln(b^x) - \ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x}(x \ln b + o(x)) \quad (\text{car } 0 < \frac{a}{b} < 1) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln b + o(1).\end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b (= \text{Max}\{a, b\})$.

Etude en $-\infty$. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \left(\frac{a^{-x} + b^{-x}}{2}\right)^{-1/x} = \left(\frac{a^x + b^x}{2a^x b^x}\right)^{-1/x} = \frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{ab}{f(X)} = \frac{ab}{b} = a \quad (= \text{Min}\{a, b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x \neq 0$ (puisque $f > 0$ sur \mathbb{R}^*),

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f)'(x) = \left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + \frac{1}{x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + x \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

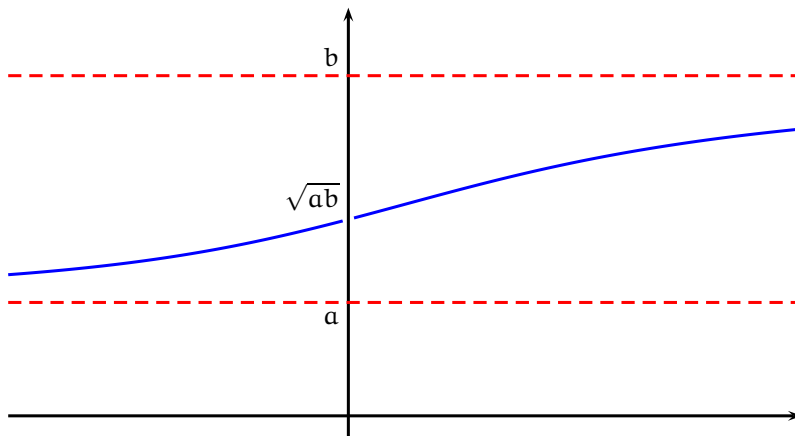
g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$g'(x) = -\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + x \frac{(a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b)(a^x + b^x) - (a^x \ln a + b^x \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}$$

$$= x \frac{(ab)^x (\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}.$$

g' est donc strictement négative sur $] -\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. g admet donc un minimum global strict en 0 égal à 0 et on en déduit que g est strictement positive sur \mathbb{R}^* . De même, f' est strictement positive sur \mathbb{R}^* . En tant compte de l'étude en 0 , on a montré que f est dérivable sur \mathbb{R} et que f' est strictement positive sur \mathbb{R} . f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

Le graphe de f a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $f(-\infty) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(+\infty)$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Exercice n° 4

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2 - 3} = x \left(1 - \frac{3}{x^2} \right)^{1/2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x \left(1 + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{1/3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x \left(1 + \frac{7}{24x} - \frac{49}{576x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x + \frac{7}{12} - \frac{49}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{389}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Puisque $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$
- Puisque $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\frac{389}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{389}{288x}$, l'expression $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right)$ est strictement négative au voisinage de $+\infty$ et donc la courbe représentative de f est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 5

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ en tant que fraction rationnelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0 . Pour tout entier naturel n , on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + \dots + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.$$

Ensuite, pour $x \notin \{-1, 1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right).$$

Exercice n° 6

1)

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x - x = -2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 = \frac{(x^2 + 3x + 5) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x - 1} = \frac{5x + 4}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5x}{x+x} = \frac{5}{2}.$$

2) • $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -6x.$

• $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2.$

• Quand x tend vers 1, $3x^2 - 6x$ tend vers $-3 \neq 0$ et donc, $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -3.$

• Enfin, $3x^2 - 6x = 3x(x-2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 6(x-2).$

3)

$$\begin{aligned} (x-x^2) \ln(\sin x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (x-x^2) \ln \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x-x^2) \ln x + (x-x^2) \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln x - x^2 \ln x + o(x^2 \ln x). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sin x \ln(x-x^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x + \ln(1-x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x - x + o(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln x + o(x^2 \ln x). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} &= e^{x \ln x} \left(e^{x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)} - e^{o(x^2 \ln x)} \right) = e^{x \ln x} (1 - x^2 \ln x - 1 + o(x^2 \ln x)) \\ &= (1 + o(1)) (-x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 \ln x. \end{aligned}$$

4) $\text{th } x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (1-e^{-2x})(1-e^{-2x} + o(e^{-2x})) = 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x}),$ et donc

$$\text{th } x \ln x = (1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})) \ln x = \ln x + o(1).$$

Par suite,

$$x^{\text{th } x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

5) Tentative à l'ordre 3.

$$\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{3}(x)^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et,

$$\sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{6}(x)^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc, $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3).$ L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent.

Tentative à l'ordre 5.

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin(\tan x)$ et $x \mapsto \tan(\sin x)$ est très fort.

Tentative à l'ordre 7.

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{3}\left(3 \times \frac{1}{120} + 3 \times \frac{1}{36}\right) + \frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{6}\left(3 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{120} \times \frac{5}{3} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \frac{1}{72} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) - \sin(\tan x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{72}\right)x^7 + o(x^7) = \frac{(3 + 10 - 40 + 24 + 20 - 5)x^7}{360} + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^7}{30} + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Pour $n \geq 5$, on a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leq n^3 \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq n^3(n-4) \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

avec $n^3(n-4) \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. De même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 8

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{x^2} \left(\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^{-1} - 1 \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{x^2} \left(-\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4) \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x}{2} + x^2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + x^3 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + x^4 \left(-\frac{1}{120} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{24}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + o(x^4) \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x \ln(x+1) - (x+1) \ln x &= x \left(\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) - (x+1) \ln x \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\equiv} -\ln x + x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\equiv} -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 9

1)

$$f_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} e^{n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} e^{a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} e^{a+b} \left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n}\right) - e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right) e^b \left(1 - \frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ = e^{a+b} \frac{-(a+b)^2 + a^2 + b^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{abe^{a+b}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc, $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{abe^{a+b}}{n}$ (puisque $ab \neq 0$).

2) $e^{-a}f_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} e^{-a + \left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} 1 + \left(-\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc

$$e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8}\right) \frac{1}{n^2} \quad (\text{car } a > 0).$$

Exercice n° 10

1) Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = \sin x$. On a $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0, 1[\subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et g est donc strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ et de plus, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$.

u est à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc en ℓ), $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$.

En résumé, la suite u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

2) Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\sin u_n)^\alpha - u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(-\alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\alpha \frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$, on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CÉSARO, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou encore $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou enfin, $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$. Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Exercice n° 11

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et, puisque la suite u est strictement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha (e^{-\alpha u_n} - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha (-\alpha u_n + o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$. Puis, comme dans l'exercice précédent,

$$\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \text{ et donc } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice n° 12

Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n , $f'(x) = \tan^2 x$. f est donc continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in I_n / f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$).

On a bien sûr $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. En particulier,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(y_n) - y_n - n\pi = 0$ et donc, puisque $y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$y_n = \text{Arctan}(\tan(y_n)) = \text{Arctan}(y_n + n\pi) \underset{n \rightarrow +\infty}{\geq} \text{Arctan}(n\pi) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et d'autre part $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\cotan(z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que $-\frac{1}{z_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\cotan(z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$, ou encore $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que

$-\cotan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice n° 13

1) Pour $x > 0$, posons $f(x) = x + \ln x$. f est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.

f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists ! x_k \in]0, +\infty[/ f(x_k) = k.$$

2) $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2} < k$ pour k suffisamment grand (car $k - \left(\frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} - \ln \frac{k}{2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées). Donc, pour k suffisamment grand, $f\left(\frac{k}{2}\right) < f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $x_k > \frac{k}{2}$ pour k suffisamment grand et donc que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Mais alors, $k = x_k + \ln x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} x_k$. Ainsi,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k + o(k).$$

Posons $y_k = x_k - k$. On a $y_k = o(k)$ et de plus $y_k + \ln(y_k + k) = 0$ ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc, $x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + o(1)$.

Posons $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$. Alors, $z_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$. Par suite,

$$z_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Exercice n° 14

1) $x^3 \sin \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^3)$ et en particulier $x^3 \sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0) = 1$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$. f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2) $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur \mathbb{R}^* en vertu de théorèmes généraux (et donc sur \mathbb{R}) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

3) f' est définie sur \mathbb{R} mais n'a pas de limite en 0. En effet, les deux suites $\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right)$ tendent vers 0

quand n tend vers $+\infty$ mais $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$ tend vers -1 et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right)$ tend vers 1 .

f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Exercice n° 15

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et donc, en tenant compte de $\text{Arcsin}(0) = 0$, on obtient par intégration

$$\text{Arcsin } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Arcsin } x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)} \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)\right)^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40}\right) + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3), \end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin } x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o(x^3).$$

- La fonction f proposée admet en 0 un développement limité d'ordre 0 à savoir $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

- Le prolongement, encore noté f , admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{6} + o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$.

La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y = \frac{x}{6}$.

- Le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y = \frac{x}{6}$.

Exercice n° 16

1) $\text{Arccos } x \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x \mapsto \text{Arccos } x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\text{Arccos } x \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(1)$,

$$\text{Arccos } x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Exercice n° 17

1) Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n x^k + 2 \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2) On a aussi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n x^{2k} \right) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p+2q=k} 1 \right) x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc $a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}$ (a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).