Planche n° 23. Comparaison des fonctions en un point : corrigé

Exercice n° 1

1) Si $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$).

$$\ln(\sin x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \sin x - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2} = -\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$

Donc, $\dfrac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\dfrac{2x-\pi}{8}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} = 0$ puis que $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\to} e^0 = 1$.

2)

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} -\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x \ln|\tan x| \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} -\cos x \ln|\cos x|$. Par suite, $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \ln|\tan x| \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\cos x \ln|\cos x| = \lim_{u \to 0} -u \ln u = 0$ puis $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\to} e^0 = 1$.

3) $\cos\dfrac{n\pi}{3n+1} + \sin\dfrac{n\pi}{6n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type 1^∞).

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin\frac{n\pi}{6n+1} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Puis,

$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right) = n\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o(1),$$

et donc $\left(\cos\dfrac{n\pi}{3n+1} + \sin\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\to} e^{\sqrt{3}\pi/24}$.

4) $\ln(\cos x) \underset{x \to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x| \times \ln(\cos x) \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}\ln|x| \underset{x \to 0}{\to} 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|} = e^{\ln|x|\ln(\cos x)} \underset{x \to 0}{\to} e^0 = 1$.

5) Quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \dfrac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \mathrm{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} &= \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} \underset{x \to 0}{=} \frac{\left(-\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)}\\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{1 + o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2}{h^2},\end{aligned}$$

et donc, $\ln|\sin h| + \dfrac{1}{1-\cos h} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{h^2} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2,\ x<\pi/2} \cos x \times e^{1/(1-\sin x)} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2,\ x>\pi/2} \cos x \times e^{1/(1-\sin x)} = -\infty$.

6) Pour $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left[2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}\right].$$

Pour $x \notin \left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3$.

7)

$$\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+x+o(x)}{1+x+o(x)} \underset{x\to 0}{=} (1+x+o(x)(1-x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} 1+o(x).$$

Puis,

$$\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{\ln(1+o(x))}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{o(x)}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x} = e^0 = 1$.

8)

$$\ln(\ln x) \underset{x\to e^-}{\sim} \ln x - 1 = \ln\frac{x}{e} \underset{x\to e^-}{\sim} \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \underset{x\to e^-}{\sim} -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \underset{x\to e^-}{\to} 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \underset{x\to e^-}{\to} 1$.

9) $x\ln x \underset{x\to 1^+}{\to} 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{x\to 1^+}{\sim} x\ln x \underset{x\to 1^+}{\sim} 1\times(x-1) = x-1.$$

Ensuite,

$$\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right) \underset{x\to 1^+}{\sim} -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \underset{x\to 1^+}{\sim} -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement,

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \underset{x\to 1^+}{\to} 0.$$

10)

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\operatorname{ch} x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x,$$

et donc

$$\frac{x\ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\times x}{x^2} = 1.$$

11)

$$\ln\left(x-x^2\right)+x-\ln x = x+\ln(1-x) \underset{x\to 0^+}{=} -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)} &\underset{x\to 0^+}{=} e^{x\ln\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)} \underset{x\to 0^+}{=} e^{x\ln x}e^{x\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)} \underset{x\to 0^+}{=} x^x e^{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}\\ &\underset{x\to 0^+}{=} x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right),\end{aligned}$$

et

$$x^{\sin x} \underset{x\to 0^+}{=} e^{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\ln x} \underset{x\to 0^+}{=} e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\ln x\right)} \underset{x\to 0^+}{=} x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\ln x\right)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}(\sin x)^x - x^{\sin x} &\underset{x\to 0^+}{=} x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) - x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\ln x\right)\right) \underset{x\to 0^+}{=} x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\ln x\right)\right)\\ &\underset{x\to 0^+}{\sim} 1\times\frac{x^3\ln x}{6} = \frac{x^3\ln x}{6},\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln\left(x-x^2\right)+x-\ln x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^3\ln x/6}{-x^2/2} = -\frac{x\ln x}{3} \underset{x\to 0^+}{\rightarrow} 0.$$

12)

$$\ln(x+1) = \ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc, $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} e^0 = 1$.

13) Quand x tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned}\frac{(\mathrm{Arcsin}\,x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} &= \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x+\frac{\pi}{4}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} \underset{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sim} \frac{1}{2}\times\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &\underset{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}{\rightarrow} \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\mathrm{Arcsin})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

14)

$$\begin{aligned}x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) &= x\ln\left(\cos\frac{1}{x}-\tan a\sin\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln\left(1-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} -\tan a+o(1),\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}$.

Exercice n° 2

1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2-x^3} &\underset{x\to0}{=} 1+\left(x^2+x^3\right)+\left(x^2+x^3\right)^2+\left(x^2+x^3\right)^3+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to0}{=} 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o\left(x^7\right).\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o\left(x^7\right)} \underset{x\to0}{=} 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o\left(x^7\right) \underset{x\to0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o\left(x^7\right).\end{aligned}$$

3) Remarques initiales.

a) Pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, on a $0<\dfrac{x}{\tan x}<1$ et donc la fonction $x\mapsto \text{Arccos}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).

b) $\dfrac{x}{\tan x}\underset{x\to0}{\to}1$ et donc $\text{Arccos}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)\underset{x\to0}{=}o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).

c) La fonction $x\mapsto \text{Arccos}\,x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (et à priori, c'est mal parti).

d) La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

Recherche d'un équivalent simple de $\text{Arccos}\,x$ en 1 à gauche.

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\text{Arccos}\,x\to0$ et donc,

$$\text{Arccos}\,x \underset{x\to0}{\sim} \sin(\text{Arccos}\,x)=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Déterminons alors un équivalent simple de $\text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x\to0}{\sim} \sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2}=\sqrt{\frac{\tan x-x}{\tan x}} \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{\frac{x^3/3}{x}}=\frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x\mapsto \text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus).

Déterminons un équivalent simple de $f(x)=\text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned}\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}} &\underset{x\to0^+}{\sim} \sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\\ &=\sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\\ &=\sqrt{\frac{\tan x-x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=g(x)\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \underset{x\to 0^+}{=} \left(\frac{\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)}{x+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{45}+o\left(x^5\right)\right)^{1/2} \underset{x\to 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{15}+o\left(x^2\right)\right)^{1/2}$$

$$\underset{x\to 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3),$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \underset{x\to 0^+}{=} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o\left(x^3\right).$$

Ensuite,

$$\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \underset{x\to 0^+}{=} \left(1+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0^+}{=} \left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o\left(x^3\right)\right)$$

$$\underset{x\to 0^+}{=} \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o\left(x^3\right),$$

et finalement,

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{=} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o\left(x^3\right)\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o\left(x^3\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi,

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}} \underset{x\to 0^+}{=} \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o\left(x^3\right).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{3}}+\frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}}+o\left(x^3\right).$$

4) La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$ et admet donc en $\dfrac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de Taylor-Young.

$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ puis $(\tan)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1+\tan^2\dfrac{\pi}{4} = 2$. Ensuite, pour tout x non dans $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $(\tan)''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$ et $(\tan)''(\dfrac{\pi}{4}) = 4$. Enfin, pour tout x non dans $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 16$. Finalement,

$$\tan x \underset{x\to\pi/4}{=} 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

5)

$$\frac{1}{x^2}\ln(\text{ch}\, x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right),$$

et donc

$$(\text{ch}\, x)^{1/x^2} \underset{x\to 0}{=} e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o\left(x^2\right).$$

6)

$$\tan^3 x\left(\cos\left(x^2\right)-1\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x+o\left(x^2\right)\right)^3\left(-\frac{x^4}{2}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x^3+o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^4}{2}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o\left(x^8\right).$$

7) On pose $h = x - 1$ ou encore $x = 1 + h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2}h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3 + o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o\left(h^3\right)\right)\left(1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)h + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)h^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24}\right)h^3 + o\left(h^3\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2 + \left(\dfrac{1}{2} - 2\ln 2\right)(x-1) + \left(3\ln 2 - \dfrac{9}{8}\right)(x-1)^2 + \left(-4\ln 2 + \dfrac{43}{24}\right)(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$.

8) Pour x réel, posons $f(x) = \text{Arctan}(\cos x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour x réel, $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}{1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}{2 - x^2 + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^{-1} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\text{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}(\cos 0) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

9) Pour $x > -1$, posons $f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \times \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\
&= \frac{1}{2\times 3\times\sqrt{2}}\left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2x}{3} + o(x)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x + o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1 - \frac{17x}{12} + o(x)\right).
\end{aligned}$$

f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\text{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}x - \frac{17}{144\sqrt{2}}x^2 + o\left(x^2\right).$$

10)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(-x^2\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}\left(-x^2\right)^3 + o\left(x^7\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\text{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + o(x^8)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{3x^4}{40}+\dfrac{5x^6}{112}+o\left(x^7\right)\right)^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o\left(x^7\right)\right)^{-2}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o\left(x^7\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{31x^4}{945}+o\left(x^5\right).$$

11) Pour x réel, posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel $g(x) = F\left(x^2\right) - F(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - F'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}},$$

puis,

$$g'(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o\left(x^8\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o\left(x^9\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o\left(x^9\right).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{24}x^9-\frac{1}{10}x^{10}+o\left(x^{10}\right).$$

12)

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o\left(x^{100}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x\right)+\ln\left(1-e^{-x}\frac{x^{100}}{(100)!}+o\left(x^{100}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+\ln\left(1-\frac{x^{100}}{(100)!}+o\left(x^{100}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o\left(x^{100}\right).
\end{aligned}$$

13) Posons $h = x - \pi$ ou encore $x = \pi + h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{4\left(\pi^3+x^3\right)} &= \sqrt[3]{4\left(\pi^3+(\pi+h)^3\right)} = \sqrt[3]{8\pi^3+12\pi^2h+12\pi h^2+4h^3}\\
&= 2\pi\left(1+\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}\\
&\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3+o\left(h^3\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} 2\pi+h+h^2\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\right)+h^3\left(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{12\pi^2}\right)+o\left(h^3\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} 2\pi+h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o\left(h^3\right),
\end{aligned}$$

puis,

$$\tan\left(\sqrt[3]{4\left(\pi^3+x^3\right)}\right) \underset{h\to 0}{=} \tan\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o\left(h^3\right)\right)$$
$$\underset{h\to 0}{=} \left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}h^3+o\left(h^3\right)=h+\frac{h^2}{2\pi}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)h^3+o\left(h^3\right).$$

Finalement, $\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to\pi}{=} (x-\pi)+\frac{1}{2\pi}(x-\pi)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)(x-\pi)^3+o\left((x-\pi)^3\right)$.

Exercice n° 3

Puisque $a>0$, $b>0$ et que pour tout réel x, $\frac{a^x+b^x}{2}>0$, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour $x\neq 0$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}$.

Etude en 0.

$$\ln\left(\frac{1}{2}\left(a^x+b^x\right)\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+\frac{x}{2}(\ln a+\ln b)+\frac{x^2}{4}\left(\ln^2 a+\ln^2 b\right)+o\left(x^2\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x\ln\sqrt{ab}+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x\ln(\sqrt{ab})+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}-\frac{1}{2}\left(x\ln\sqrt{ab}\right)^2+o\left(x^2\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x\ln\sqrt{ab}+\frac{1}{8}\left(\ln^2 a-2\ln a\ln b+\ln^2 b\right)x^2+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x\ln\sqrt{ab}+\frac{x^2}{8}\ln^2\frac{a}{b}+o\left(x^2\right).$$

Ensuite,

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \underset{x\to 0}{=} \exp\left(\ln\sqrt{ab}+\frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}+o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{ab}\left(1+\frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}+o(x)\right).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=\sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}(>0)$.

Etude en $+\infty$.

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(a^x+b^x\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(\ln\left(b^x\right)-\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(x\ln b+o(x)) \quad \left(\text{car } 0<\frac{a}{b}<1\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} \ln b+o(1).$$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ $(=\text{Max}\{a,b\})$.

Etude en $-\infty$. Pour tout réel x,

$$f(-x)=\left(\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\right)^{-1/x}=\left(\frac{a^x+b^x}{2a^xb^x}\right)^{-1/x}=\frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty} f(-X)=\lim_{X\to+\infty}\frac{ab}{f(X)}=\frac{ab}{b}=a \quad (=\text{Min}\{a,b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x\neq 0$ (puisque $f>0$ sur $\mathbb{R}^*$),

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f)'(x)=\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+\frac{1}{x}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

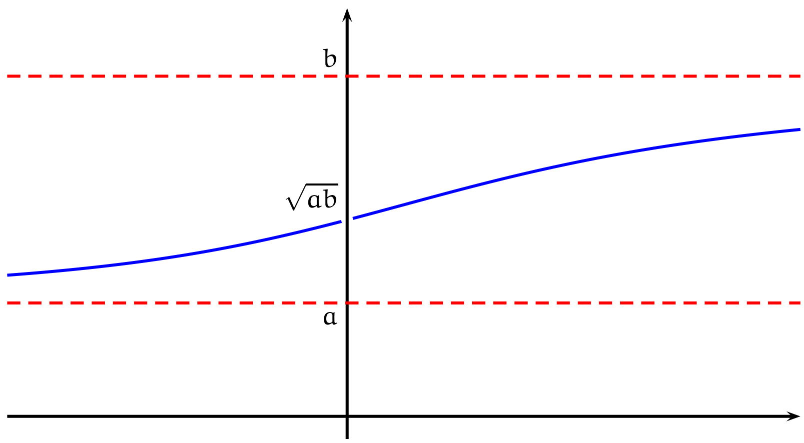
$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+x\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\frac{a^x\ln a + b^x \ln b}{a^x+b^x} + \frac{a^x\ln a + b^x \ln b}{a^x+b^x} + x\frac{(a^x\ln^2 a + b^x\ln^2 b)(a^x+b^x) - (a^x\ln a + b^x\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\ &= x\frac{(ab)^x(\ln a - \ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}.\end{aligned}$$

g' est donc strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. g admet donc un minimum global strict en 0 égal à 0 et on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. De même, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. En tant compte de l'étude en 0, on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le graphe de f a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $f(-\infty) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(+\infty)$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Exercice n° 4

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} \underset{x\to+\infty}{=} 2x\left(1+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} \underset{x\to+\infty}{=} 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{49}{576x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} 2x+\frac{7}{12}-\frac{49}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{389}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

• Puisque $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$, a courbe représentative de f admet en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$

• Puisque $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{389}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{389}{288x}$, l'expression $f(x) - \left(x - \frac{7}{12}\right)$ est strictement négative au voisinage de $+\infty$ et donc la courbe représentative de f est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 5

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ en tant que fraction rationnelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + \ldots + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.$$

Ensuite, pour $x \notin \{-1, 1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Exercice n° 6

1)

$$\sqrt{x^2+3x+5} - x + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x - x = -2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2+3x+5} - x + 1 = \frac{(x^2+3x+5)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x-1} = \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+3x+5}+x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5x}{x+x} = \frac{5}{2}.$$

2) • $3x^2 - 6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x$.

• $3x^2 - 6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$.

• Quand x tend vers 1, $3x^2 - 6x$ tend vers $-3 \neq 0$ et donc, $3x^2 - 6x \underset{x\to 1}{\sim} -3$.

• Enfin, $3x^2 - 6x = 3x(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2)$.

3)

$$\begin{aligned}\left(x-x^2\right)\ln(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x-x^2\right)\ln\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x-x^2\right)\ln x + \left(x-x^2\right)\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\ln x - x^2\ln x + o\left(x^2\ln x\right).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sin x \ln\left(x-x^2\right) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(\ln x + \ln(1-x)) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)(\ln x - x + o(x))\\ &\underset{x\to 0}{=} x\ln x + o\left(x^2\ln x\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} &= e^{x\ln x}\left(e^{x^2\ln x + o\left(x^2\ln x\right)} - e^{o\left(x^2\ln x\right)}\right) = e^{x\ln x}\left(1 - x^2\ln x - 1 + o\left(x^2\ln x\right)\right)\\ &= (1+o(1))\left(-x^2\ln x + o\left(x^2\ln x\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.\end{aligned}$$

4) $\operatorname{th} x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{=} = \left(1-e^{-2x}\right)\left(1 - e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right)\right) = 1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})$, et donc

$$\operatorname{th} x \ln x = (1 - 2e^{-2x} + o(e^{-2x}))\ln x = \ln x + o(1).$$

Par suite,

$$x^{\operatorname{th} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

5) Tentative à l'ordre 3.

$$\tan(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}(x)^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),$$

et,

$$\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{6}(x)^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Donc, $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$. L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent.

Tentative à l'ordre 5.

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{2}{15}(x)^5+o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)x^5+o\left(x^5\right)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o\left(x^5\right),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+\frac{1}{120}(x)^5+o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto \sin(\tan x)$ et $x\mapsto \tan(\sin x)$ est très fort.

Tentative à l'ordre 7.

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o\left(x^7\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{3}\left(3\times\frac{1}{120}+3\times\frac{1}{36}\right)+\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{17}{315}\right)x^7+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5-\frac{1}{5040}(x)^7+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{6}\left(3\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{120}\times\frac{5}{3}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{15}-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o\left(x^7\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\tan(\sin x)-\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}-\frac{1}{72}\right)x^7+o\left(x^7\right)=\frac{(3+10-40+24+20-5)x^7}{360}+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^7}{30}+o\left(x^7\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Pour $n\geqslant 5$, on a

$$u_n=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leqslant n^3 \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leqslant n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

avec $n^3(n-4)\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. De même $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 8

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)\right)^{-1} - 1\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2} + x^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + x^3\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + x^4\left(-\frac{1}{120} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{24}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x\ln(x+1) - (x+1)\ln x &= x\left(\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) - (x+1)\ln x \\ &\underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 9

1)

$$f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &\underset{n\to+\infty}{=} e^{a+b}\left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n}\right) - e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1 - \frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= e^{a+b}\frac{-(a+b)^2 + a^2 + b^2}{2n} + o(\frac{1}{n}) = -\frac{abe^{a+b}}{n} + o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Donc, $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{abe^{a+b}}{n}$ (puisque $ab \neq 0$).

2) $e^{-a}f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-a+\left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \left(-\dfrac{a^2}{2n} + \dfrac{a^3}{3n^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{a^2}{2n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et donc

$$e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2} \quad \text{(car } a > 0\text{)}.$$

Exercice n° 10

1) Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = \sin x$. On a $f\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) =]0, 1] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et g est donc strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par suite, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ et de plus, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$.

u est à valeurs dans $]0, \dfrac{\pi}{2}]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc en ℓ), $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$.

En résumé, la suite u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

2) Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0 , on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = (\sin u_n)^{\alpha} - u_n^{\alpha} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)\right)^{\alpha} - u_n^{\alpha} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{\alpha} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o\left(u_n^{\alpha+2}\right)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$, on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de Césaro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou encore $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}\right) = \dfrac{1}{3} + o(1)$ ou enfin, $\dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{n}{3} + \dfrac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$. Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Exercice n° 11

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et, puisque la suite u est strictement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell\left(1 - e^{-\ell}\right) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}(e^{-\alpha u_n} - 1) \underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha}(-\alpha u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$. Puis, comme dans l'exercice précédent, $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} n + \dfrac{1}{u_0} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice n° 12

Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n, $f'(x) = \tan^2 x$. f est donc continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! x_n \in I_n/\ f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$).

On a bien sûr $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in \left]n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$. En particulier,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(y_n) - y_n - n\pi = 0$ et donc, puisque $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$y_n = \text{Arctan}(\tan(y_n)) = \text{Arctan}(y_n + n\pi) \geqslant \text{Arctan}(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $y_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et d'autre part $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\text{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que $-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\text{cotan}(z_n n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$, ou encore $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $-\text{cotan}\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n \underset{n\to+\infty}{=} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice n° 13

1) Pour $x > 0$, posons $f(x) = x + \ln x$. f est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.
f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \exists! x_k \in]0, +\infty[/\ f(x_k) = k.$$

2) $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2} < k$ pour k suffisamment grand (car $k - \left(\frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} - \ln\frac{k}{2} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées). Donc, pour k suffisamment grand, $f\left(\frac{k}{2}\right) < f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $x_k > \frac{k}{2}$ pour k suffisamment grand et donc que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Mais alors, $k = x_k + \ln x_k \underset{k\to+\infty}{\sim} x_k$. Ainsi,

$$x_k \underset{k\to+\infty}{=} k + o(k).$$

Posons $y_k = x_k - k$. On a $y_k = o(k)$ et de plus $y_k + \ln(y_k + k) = 0$ ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) \underset{k\to+\infty}{=} -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc, $x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + o(1)$.

Posons $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$. Alors, $z_k \underset{k\to+\infty}{=} o(1)$ et $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$. Par suite,

$$z_k \underset{k\to+\infty}{=} \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) \underset{k\to+\infty}{=} -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Exercice n° 14

1) $x^3 \sin\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} O\left(x^3\right)$ et en particulier $x^3 \sin\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$. Donc, en tenant compte de $f(0) = 1$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$. f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2) $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} - 2\cos\dfrac{1}{x^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} - 2\cos\dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

3) f' est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0. En effet, les deux suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right)$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$ tend vers -1 et $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right)$ tend vers 1.

f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Exercice n° 15

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right)$, et donc, en tenant compte de $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$, on obtient par intégration

$$\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).$$

Puis,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Arcsin}\, x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{3x^4}{40} + o\left(x^4\right)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o\left(x^4\right)\right)^{-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40}\right) + \frac{x^4}{36} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o\left(x^3\right),\end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{Arcsin}\, x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o\left(x^3\right).$$

• La fonction f proposée admet en 0 un développement limité d'ordre 0 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

• Le prolongement, encore noté f, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{6} + o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y = \dfrac{x}{6}$.

• Le signe de la différence $f(x) - \dfrac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\dfrac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y = \dfrac{x}{6}$.

Exercice n° 16

1) $\operatorname{Arccos} x \underset{x \to 1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\operatorname{Arccos} x \underset{x \to 1^-}{=} o(1)$,

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Exercice n° 17

1) Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \\
&\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right) + o\left(x^n\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

2) On a aussi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2q}\right) + o\left(x^n\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k} 1\right) x^k + o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc $a_k = \dfrac{2k+3+(-1)^k}{4}$ (a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).

