Planche n° 22. Dérivation : corrigé

Exercice n° 1

f' est continue sur le segment $[a, b]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit $M = \sup\{f'(x),\ x \in [a, b]\}$.
Soit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et b (c'est-à-dire $\forall x \in [a, b],\ g(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)+f(a))$ puis $h = f - g$. On va montrer que $h = 0$ sous l'hypothèse $M = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

h est dérivable sur $[a, b]$ et, pour $x \in [a, b]$, $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) - M \leqslant 0$. h est donc décroissante sur $[a, b]$. Par suite, $\forall x \in [a, b],\ 0 = h(b) \leqslant h(x) \leqslant h(a) = 0$. Ainsi, $\forall x \in [a, b],\ h(x) = 0$, ou encore $f = g$. f est donc affine sur $[a, b]$.

Exercice n° 2

On a déjà $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Puisque $a \neq b$, on peut choisir A tel que $g(a) = 0$
(à savoir $A = \dfrac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$).

Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + A\frac{(b-x)^n}{n!}\\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + A\frac{(b-x)^n}{n!}\\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + A\frac{(b-x)^n}{n!}\\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}\left(A - f^{(n+1)}(x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{(b-c)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(c)) = 0$ et donc, puisque $c \neq b$, tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.

L'égalité $g(a) = 0$ s'écrit alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel c de $]a, b[$.

Exercice n° 3

Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b) = g(a) = 0$ (c'est-à-dire $A = \dfrac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) - \dfrac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a))\right)$).

$f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a, b[, \mathbb{R})$ et donc $g \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$. Pour $x \in [a, b]$, on a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2,$$

puis pour $x \in]a, b[$,

$$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) - 6A(x-a) = \frac{x-a}{2}(-12A - f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie de plus $g(a) = g(b)$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) = 0$. De même, g' est continue sur $[a, d] \subset [a, b]$, dérivable sur $]a, d[(\neq \varnothing)$ et vérifie de plus $g'(a) = g'(d)(= 0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, d[\subset]a, b[$ tel que $g''(c) = 0$ ou encore tel que $A = -\dfrac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c \neq a$).

En écrivant explicitement l'égalité $g(b) = 0$, on a montré que :

$$\exists c \in]a, b[/ \ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a, b]$, la formule précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) &= \frac{b-a}{2}(F'(b) + F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 \\ &= \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.\end{aligned}$$

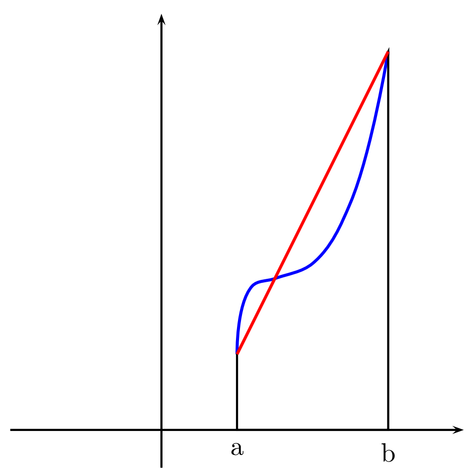
Donc, si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a, b[/ \ \int_a^b f(t)\ dt = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique.

Si f est positive, $A_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est l'aire du domaine $D = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2/ \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $A_2 = \dfrac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$. Si $M_2 = \sup\{|f''(x)|, \ x \in [a, b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|A_1 - A_2| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$



Exercice n° 4

1) Pour $x > -1$, posons $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$. Pour $n \geqslant 1$, f_n est n fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$, on a d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^{n-1}\right)^{(k)} (\ln(1+x))^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(x^{n-1}\right)^{(k)} (\ln(1+x))^{(n-k)} \ (\text{car } (x^{n-1})^{(n)}) = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(x^{n-1}\right)^{(k)} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-k-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}} \\ &= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-x)^{n-k-1}}{(x+1)^{n-k}}.\end{aligned}$$

Puis, pour $x = 0$, $f_n^{(n)}(0) = n \times (n-1)! = n!$, et pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, d'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(-\frac{x}{x+1}\right)^{n-k} = -\frac{(n-1)!}{x}\left(\left(1-\frac{x}{x+1}\right)^{n}-1\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}.
\end{aligned}$$

2) On sait dériver facilement des sommes ou plus généralement des combinaisons linéaires. Donc, on linéarise.

$$\begin{aligned}
\cos^3 x \sin(2x) &= \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3\left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right) = \frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{16i}(e^{5ix}+3e^{3ix}+2e^{ix}-2e^{-ix}-3e^{-3ix}-e^{-5ix}) = \frac{1}{8}(\sin(5x)+3\sin(3x)+2\sin(x))
\end{aligned}$$

Puis, pour n naturel donné :

$$(\cos^3 x\sin 2x)^{(n)} = \frac{1}{8}\left(5^n\sin\left(5x+n\frac{\pi}{2}\right)+3^{n+1}\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

expression que l'on peut détailler suivant la congruence de n modulo 4.

3) On sait dériver des objets simples et donc on décompose en une somme de fractions plus simples. Pour tout réel $x \neq 1$,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{x^2-2x+1+2x-2+2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Puis, pour n entier naturel donné et $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\right)^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+2\frac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}+\frac{(-1)^n(n+2)!}{(x-1)^{n+3}} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+3}}((x-1)^2+2(n+1)(x-1)+(n+2)(n+1)) \\
&= \frac{(-1)^n n!\left(x^2+2nx+n^2+n+1\right)}{(x-1)^{n+3}}.
\end{aligned}$$

4) La fonction proposée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux. La formule de LEIBNIZ fournit pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
((x^3+2x-7)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} \\
&= \left((x^3+2x-7)+n(3x^2+2)+\frac{n(n-1)}{2}(6x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times 6\right)e^x \\
&= \left(x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7\right)e^x.
\end{aligned}$$

Enfin, non vérifie directement que cette formule reste valable pour $n \in \{0,1,2\}$.

Exercice n° 5

f est de classe $^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\frac{P_n(x)}{x^{3n}}+\left(P_n'(x)\frac{1}{x^{3n}}-3nP_n(x)\frac{1}{x^{3n+1}}\right)\right)e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},$$

où, pour tout réel x, $P_{n+1}(x) = 2P_n(x)+x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)$. Puisque P_{n+1} est un polynôme, on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

• Pour $n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim\limits_{x\to 0,\ x\neq 0} f(x) = \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0 = f(0)$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. Alors, d'une part f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, d'après un théorème de croissances comparées, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} e^{-1/x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $x \neq 0$. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0,\ x\neq 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6

Montrons que : $\forall x > 0,\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} &\Leftrightarrow x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1)-\ln x)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Soit x un réel strictement positif fixé. Pour $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

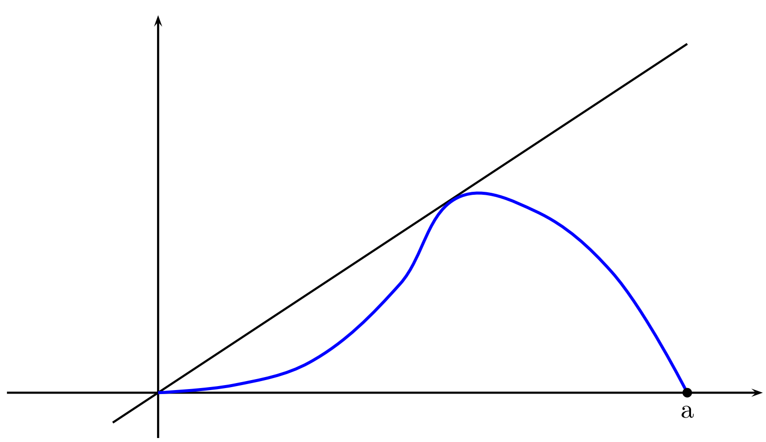
$$\exists c \in]x, x+1[/\ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

Ceci montre que $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice n° 7

Supposons par exemple $a > 0$ (si $a < 0$, on applique le travail ci-dessous à la fonction $x \mapsto f(-x)$).



Soit x_0 un réel non nul. Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. (T_{x_0}) passe par l'origine si et seulement si

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Pour x réel, on pose $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (g est « la fonction pente à l'origine »).

Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, g est déjà continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Puisque f est dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$, g est de plus continue en 0.
Finalement, g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et vérifie $g(0) = g(a)(= 0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe un réel x_0 dans $]0, a[$ tel que $g'(x_0) = 0$. Puisque x_0 n'est pas nul, on a $g'(x_0) = \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$. L'égalité $g'(x_0) = 0$ s'écrit $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Exercice n° 8

1) Soit m un élément de $]f'(a), f'(b)[$. Puisque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h} = f'(b)$, on a (en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \text{Min}\{m - f'(a), f'(b) - m\} > 0$)

$$\exists h_1 > 0/\ \forall h \in]0, h_1[,\ \left(a + h \in I \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m\right) \text{ et}$$
$$\exists h_2 > 0/\ \forall h \in]0, h_2[\ \left(b + h \in I \Rightarrow \frac{f(b+h) - f(b)}{h} > m\right).$$

L'ensemble $E = \{h \in]0, \text{Min}\{h_1, h_2\}[/\ a + h \text{ et } b + h \text{ sont dans } I\}$ n'est pas vide (car I est ouvert) et pour tous les h de E, on a : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < m < \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$.
$h > 0$ est ainsi dorénavant fixé.

2) La fonction f est continue sur I et donc, la fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $g(a) < m < g(b)$, $\exists y \in [a, b]/\ g(y) = m$ ou encore $\exists y \in [a, b]/\ \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h} = m$.
Maintenant, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists x \in]y, y + h[\subset I/\ m = \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h} = f'(x)$.

On montré qu'une fonction dérivée (n'est pas nécessairement continue mais) vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de DARBOUX).

Exercice n° 9

1ère solution. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{(\sqrt{x})^2/2} \to -\frac{1}{2}.$$

f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2ème solution. f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$. Quand x tend vers 0, f' tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

En résumé, f est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir $-\dfrac{1}{2}$.
On en déduit que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et en particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Remarque. On a démontré dans la deuxième solution un résultat plus fort que celui démontré dans la première solution.

Exercice n° 10

Pour tout réel x de $[a, b]$, $\Delta(x) = (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x))$. La fonction Δ est donc continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et pour $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned}\Delta'(x) &= -f'(x)(g(b) - g(x)) - g'(x)(f(a) - f(x)) + g'(x))(f(b) - f(x)) + f'(x)(g(a) - g(x)) \\ &= f'(x)(g(a) - g(b)) + g'(x)(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

De plus, $\Delta(a) = \Delta(b)(= 0)$. Donc, d'après le théorème de ROLLE, $\exists c \in]a, b[/\ \Delta'(c) = 0$.

L'égalité $\Delta'(c) = 0$ s'écrit : $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ($g = \text{Id}$ « est » le théorème des accroissements finis.)

Exercice n° 11

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$, $\exists A > 0/\ \forall x > 0,\ (x \geqslant A \Rightarrow xf'(x) \geqslant \dfrac{1}{2})$.

Soit x un réel fixé supérieur ou égal à A. $\forall t \in [A, x],\ f'(t) \geqslant \dfrac{1}{2x}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_A^x f'(t)\ dt \geqslant \int_A^x \frac{1}{2t}\ dt$ ce qui fournit :

$$\forall x \geq A,\ f(x) \geqslant f(A) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln A),$$

et montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n° 12 On remarque tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R} f\left(\frac{x}{2}+3\right) = f(f\circ f(x)) = f\circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = \dfrac{1}{2}f'(x)$, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'\left(\frac{x}{2}+3\right) = f'(x).$$

Soit alors x un réel donné et u la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(u_n) = f'(u_0) = f'(x)$. Maintenant, u est une suite arithmético-géométrique et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 6)$$

ce qui montre que la suite u converge vers 6. La suite $(f'(u_n))_{n\geq 0}$ est constante, de valeur $f'(x)$. f' étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f'(6),$$

ce qui montre que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que f est affine.

Réciproquement, pour x réel, posons $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels.

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a(ax+b) + b = \frac{x}{2} + 3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + ab + b - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } (a+1)b = 3 \Leftrightarrow \left(a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3\left(2-\sqrt{2}\right)\right) \text{ ou } \left(a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3\left(2+\sqrt{2}\right)\right). \end{aligned}$$

On trouve deux fonctions solutions, les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3\left(2-\sqrt{2}\right) \text{ et } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Exercice n° 13

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pour x réel, posons $g(x) = e^x f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$. Il s'agit donc maintenant de montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}g'(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \geqslant A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^x \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}e^x\right).$$

Pour x réel donné supérieur ou égal à A, on obtient en intégrant sur $[A, x]$ (puisque g est continue sur $[A, x]$)

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A) = \int_A^x -\frac{\varepsilon}{2}e^t\ dt \leqslant \int_A^x g'(t)\ dt = g(x) - g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$

et donc

$$\forall x \geqslant A,\ g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{A-x}\right) \leqslant e^{-x}g(x) \leqslant g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{A-x}\right).$$

Maintenant, $g(A)e^{-x} - \dfrac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$ et $g(A)e^{-x} + \dfrac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$ tendent respectivement vers $-\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc,

$$\exists B \geqslant A/\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \geqslant B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ et } g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) < \varepsilon\right).$$

Pour $x \geqslant B$, on a donc $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow |e^{-x}g(x)| < \varepsilon)$ et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}g(x) = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 14

1) Pour $x \geqslant -1$, posons $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = f(x) - x$.

• Soit $u_0 \in I = [-1, +\infty[$. f est définie sur I et de plus $f(I) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$. On en déduit, par récurrence, que la suite u est définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1, +\infty[$.

• Si la suite u converge, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant -1$, sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant -1$. Puisque f est continue sur $[-1, +\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

et ℓ est un point fixe de f. Or, pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x^2 \text{ et } x \geqslant 0 &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } x \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, si la suite (u_n) converge, c'est vers le nombre $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (le nombre d'or).

• Pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f(x) - \alpha) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\alpha}) = \operatorname{sgn}((1+x) - (1+\alpha)) \quad \text{(par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x - \alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, les intervalles $[-1, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$ sont stables par f. Donc, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, alors par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$ et si $u_0 > \alpha$, alors par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$.

• Soit $x \geqslant -1$. Si $x \in [-1, 0]$, $\sqrt{1+x} - x \geqslant 0$ et si $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(g(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - x)\\ &= \operatorname{sgn}((1+x) - x^2) \quad \text{(par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}\left(\left(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - x\right)\right) = \operatorname{sgn}(\alpha - x) \text{ (car ici } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

On en déduit que, si $x \in [-1, \alpha[$, $f(x) > x$, et si $x \in]\alpha, +\infty[$, $f(x) < x$. Mais alors, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

La suite u est donc strictement croissante, majorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α.
Si $u_0 > \alpha$, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$, pour n entier naturel donné, on a

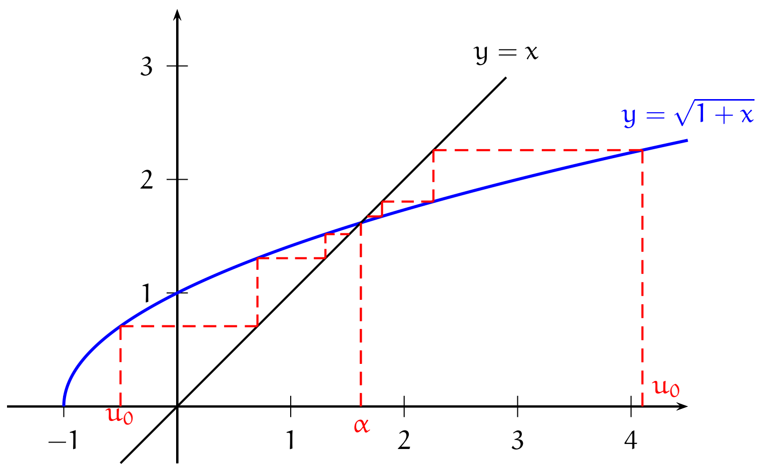
$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite u est donc strictement décroissante, minorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α. Enfin, si $u_0 = \alpha$, la suite u est constante.

• En résumé,

- si $u_0 \in \left[-1, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right[$, la suite u est strictement croissante, convergente de limite $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,
- si $u_0 \in \left]\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, +\infty\right[$, la suite u est strictement décroissante, convergente de limite $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,
- si $u_0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, la suite u est constante et en particulier convergente de limite $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

On note que dans tous les cas, la suite u est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2) • Si $u_0 > 0$, alors puisque f est définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et que I est stable par f ($\forall x > 0,\ \ln(1+x) > \ln 1 = 0$), la suite u est définie et est strictement positive. Si la suite u converge, sa limite ℓ est un réel positif **ou nul**. Par continuité de f sur $[0, +\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Pour $x > -1$, posons $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

g' est strictement positive sur $]-1, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$. g est donc strictement croissante sur $]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, si $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $g(x) < 0$. En particulier, pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f(x) \neq x$. Puisque $f(0) = 0$, f admet dans $]-1, +\infty[$ un et un seul point fixe à savoir 0.

En résumé, si $u_0 > 0$, la suite u est définie, strictement positive, et de plus, si la suite u converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• Mais, pour n entier naturel donné,

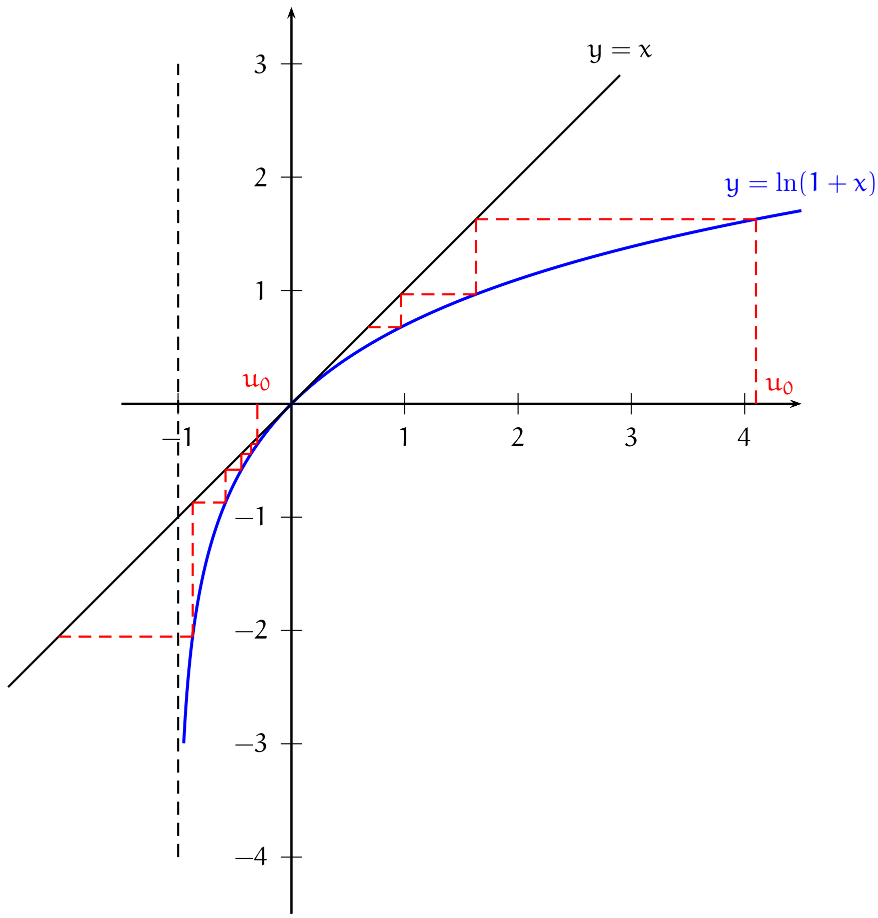
$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n < 0.$$

Par suite, la suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc, d'après ce qui précède, converge vers 0. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante.

• Il reste donc à étudier le cas où $u_0 \in]-1, 0[$. Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$. Dans le cas contraire, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > -1$. Comme précédemment, par récurrence, la suite u est à valeurs dans $]-1, 0[$ et strictement décroissante. Etant minorée par -1, la suite u converge vers un certain réel ℓ.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < u_n \leqslant u_0 < 0$, on a $-1 \leqslant \ell \leqslant u_0 < 0$. Donc, ou bien $\ell = -1$, ou bien f est continue en ℓ et ℓ est un point fixe de f élément de $]-1, 0[$.
On a vu que f n'admet pas de point fixe dans $]-1, 0[$ et donc ce dernier cas est exclu. Ensuite, si $\ell = -1$, il existe un rang N tel que $u_N \leqslant -0,9$. Mais alors, $u_{N+1} \leqslant \ln(-0,9+1) = -2,3\ldots < -1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.
Donc, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$ et la suite u n'est plus définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

- si $u_0 \in]0, +\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$,
- si $u_0 = 0$, la suite u est constante,
- si $u_0 \in]-1, 0[$, la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.



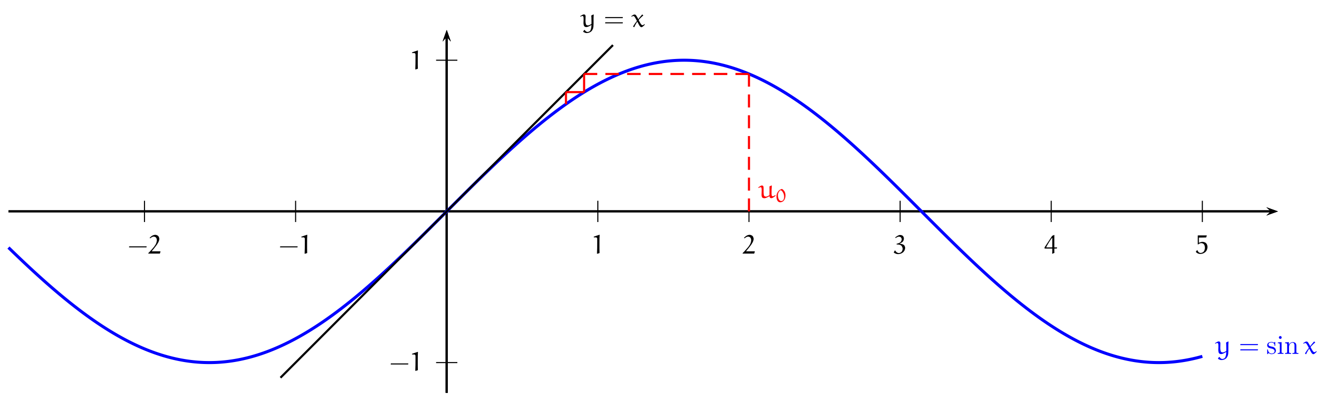
3) • Pour tout choix de u_0, $u_1 \in [-1, 1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1, 1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Si $u_0 \in [-1, 0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant impaire, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = -u_n$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0, 1]$.

• Puisque $]0, 1] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin]0, 1] \subset]0, 1]$ et l'intervalle $I =]0, 1]$ est stable par f. Ainsi, si $u_0 \in]0, 1]$, alors par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.

• Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $]0, 1]$ et donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que pour $x \in]0, 1]$, $g(x) < g(0) = 0$.

• Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0, 1]$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0, 1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f. L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0, 1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• L'étude préliminaire montre la suite u converge vers 0 pour tout choix de u_0.



4) • Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puis $u_2 \in [0, 1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [0, 1]$.

• On a $\cos([0, 1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0, 504..., 1] \subset [0, 1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos x$ laisse stable l'intervalle $I = [0, 1]$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

• Pour $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = \cos x - x$. g est somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0, 1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$. De plus, g est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = \cos 0 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois sur $[0, 1]$ en un certain réel α. Ainsi, f admet sur $[0, 1]$ un unique point fixe, à savoir α. Puisque f est continue sur le segment $[0, 1]$, on sait que si la suite u converge, c'est vers α.

• La fonction $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leq \sin 1 < 1.$$

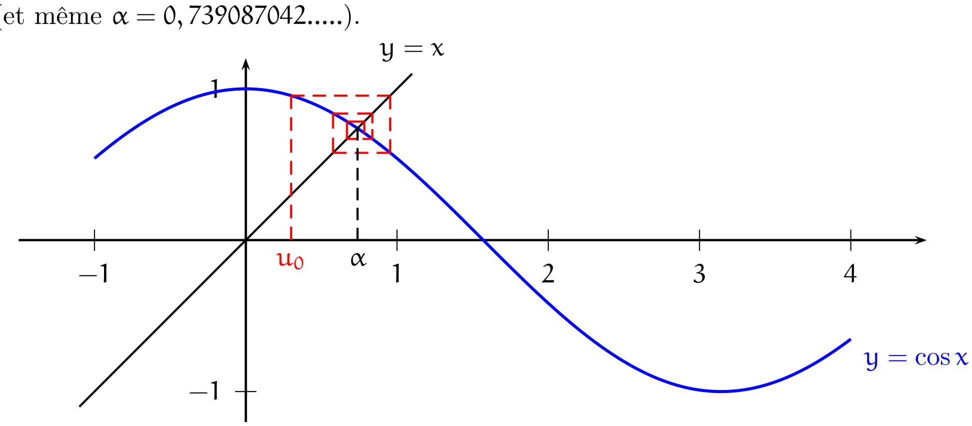
L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $|\cos x - \cos y| \leqslant \sin(1)|x - y|$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin 1 |u_n - \alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n.$$

Comme $0 \leqslant \sin 1 < 1$, la suite $(\sin 1)^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α. On peut noter que puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0 \in [0, 1]$. On peut noter également que si $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)} = 26, 6...$, alors $(\sin 1)^n < 10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha = 0, 73...$ (et même $\alpha = 0, 739087042.....$).



5) • Si u_0 est un réel quelconque, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [-1, 1]$. On supposera sans perte de généralité que $u_0 \in [-1, 1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante et d'autre part, l'étude du cas $u_0 \in [-1, 0[$ se ramène, comme en 3), à l'étude du cas $u_0 \in]0, 1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0, 1]$.

• Si $x \in]0, 1]$, alors $2x \in]0, 2] \subset]0, \pi[$ et donc $\sin(2x) \in]0, 1]$. L'intervalle $I =]0, 1]$ est donc stable par la fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$.

• Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin(2x) - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = 2\cos(2x) - 1$. g est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right]$. On en déduit que si $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right]$, $g(x) > g(0) = 0$.

D'autre part, g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right]$ et vérifie $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$ et $g(1) = \sin 2 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois en un certain réel $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}, 1\right[$. On note que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ et donc $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, 1\right[$.

En résumé, g s'annule une et une seule fois sur $]0,1]$ en un certain réel $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, 1\right[$, g est strictement positive sur $]0,\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha, 1]$.

Supposons que $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et montrons par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$. Dans le cas contraire, tous les u_n sont dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

La suite u est donc strictement croissante. Etant majorée par $\frac{\pi}{4}$, la suite u converge. Comme g est continue sur $\left[u_0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[u_0, \frac{\pi}{4}\right]$, on sait que la limite de u est un point fixe de f élément de $\left[u_0, \frac{\pi}{4}\right]$. Mais l'étude de g a montré que f n'admet pas de point fixe dans cet intervalle (u_0 étant strictement positif). On aboutit à une contradiction.

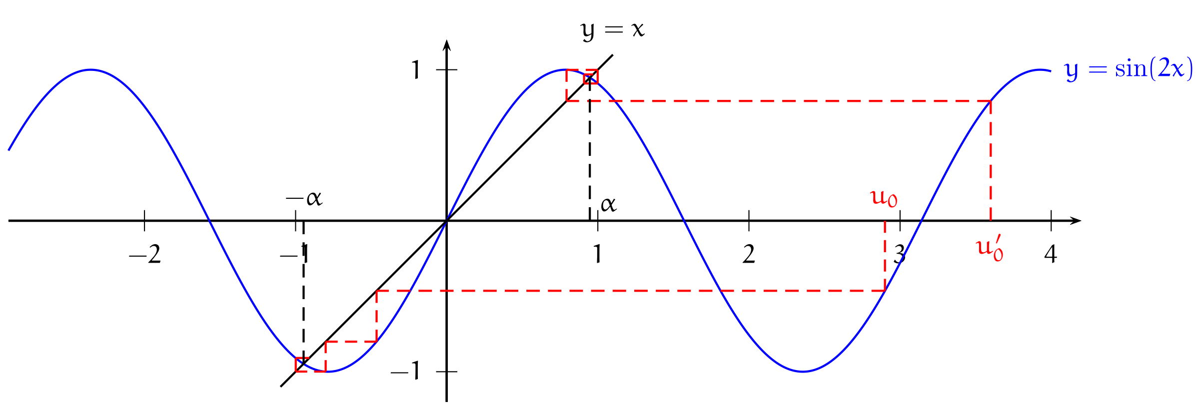
Donc, ou bien $u_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$, ou bien $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et dans ce cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$.

Dans tous les cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$. Mais alors, puisque $f\left(\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]\right) = \left[\sin 2, \sin\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ (car $\sin 2 = 0,909... > 0,785... = \frac{\pi}{4}$), pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in [\frac{\pi}{4}, 1]$.

• Pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$, $|g'(x)| = |2\cos(2x)| \leqslant |2\cos 2|$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |2\cos 2| \times |u_n - \alpha|$, puis que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \alpha| \leqslant |2\cos 2|^{n-n_0} \left|u_{n_0} - \alpha\right|.$$

Comme $|2\cos 2| = 0,83... < 1$, on en déduit que la suite u converge vers α. La machine donne par ailleurs $\alpha = 0,947...$.



6) • Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.

• Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad \text{(I)} \\
&u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad \text{(II)} \\
&u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad \text{(III)}.
\end{aligned}$$

1er cas. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite u est constante.

2ème cas. Si $u_0 \in]1,2[$, (II) et (III) permettent de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]1,2[$. (I) montre alors que la suite u est strictement décroissante. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [1, u_0] \subset [1,2[$. Dans ce cas, la suite (u_n) converge vers 1.

3ème cas. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, (III) permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$. Mais alors, (I) montre que la suite u est strictement croissante. Si u converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0, +\infty[\subset]2, +\infty[$. f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite u diverge et, u étant strictement croissante, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4ème cas. Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1, 2[$ ce qui ramène au deuxième cas. La suite u converge vers 1.
5ème cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite u est constante à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite u converge vers 2.
6ème cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas. La suite u tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0, 2[$, la suite u converge vers 1, si $u_0 \in \{0, 2\}$, la suite u converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, la suite u tend vers $+\infty$.