Planche n° 21. Continuité : corrigé

Exercice n° 1

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in A$. $|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$ ou encore $|y - z| \geqslant |x - z| - |x - y|$. Comme $d(x, A)$ est un minorant de $\{|x - z|,\ z \in A\}$, on en déduit que $|y - z| \geqslant d(x, A) - |x - y|$.

Ainsi, $\forall z \in A,\ |y - z| \geqslant d(x, A) - |x - y|$ et donc $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - z|,\ z \in A\}$. Puisque $d(y, A)$ est le plus grand de ces minorants, on en déduit que $d(x, A) - |x - y| \leqslant d(y, A)$. On a montré que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, A) - d(y, A) \leqslant |y - x|.$$

En appliquant ce résultat à y et x, on a aussi montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(y, A) - d(x, A) \leqslant |y - x|$.
Finalement, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|f(y) - f(x)| \leqslant |y - x|$. Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2

Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exercice n° 3

Puisque $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0, 1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geqslant A$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ell + 1}{2} < 1$. Ainsi, $f(A) \leqslant A$ et $f(0) \geqslant 0$. La fonction $g\ :\ x \mapsto f(x) - x$ est donc continue sur $[0, A]$ et change de signe sur $[0, A]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans $[0, A]$ et donc dans $[0, +\infty[$ ou encore l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[0, +\infty[$.

Exercice n° 4

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, f admet en tout réel x de $]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche vérifiant $-\infty < f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) < +\infty$. De même, f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b vérifiant $f(a) \leqslant f(a^+) < +\infty$ et $-\infty < f(b^-) \leqslant f(b)$.

Soit $E = \{x \in [a, b]/\ f(x) \geqslant x\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supérieure c vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$.

Montrons que $f(c) = c$.
Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in E/\ b - \dfrac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ et que les x_n sont dans E, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$x_n \leqslant f(x_n) \leqslant b\ (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a, b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-)$ ou vers $f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leqslant f(b^-) \leqslant f(b) \leqslant b$ ou directement $b \leqslant f(b) \leqslant b$. Dans tous les cas, $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f.

Si $c \in [a, b[$, par définition de c, pour x dans $]c, b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c)(\leqslant f(c+)) \leqslant c$.
D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in E/\ c - \dfrac{1}{n} < x_n \leqslant c$. x_n étant dans E, on a $f(x_n) \geqslant x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geqslant f(c^-) \geqslant c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

Exercice n° 5

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a), +\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $]-\infty, f(b)]$.

Si f est discontinue en un x_0 de $]a, b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a, x_0[\ (\neq \varnothing),\ f(x) \leqslant f(x_0^-)$ et $\forall x \in [x_0, b],\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
Donc $\left]f\left(x_0^-\right), f\left(x_0\right)\right[\cap f([a, b]) = \varnothing$ ce qui est exclu puisque d'autre part $\left]f\left(x_0^-\right), f\left(x_0\right)\right[\neq \varnothing$ et $\left]f\left(x_0^-\right), f\left(x_0\right)\right[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a, b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a, b]$.

Exercice n° 6

Soit $x > 0$. Pour tout naturel n, $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = ... = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{1/2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{1/2^n}\right) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0, +\infty[$, puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0.

Pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geqslant 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
f vérifie donc : $\forall x \geqslant 0,\ f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n° 7

1) Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux réels de $[0, 1]$. Supposons que $x \leqslant y$.

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leqslant x + y - 2\sqrt{x^2} = y - x = |x - y|\,.$$

En échangeant les rôles de x et y, l'égalité précédente est encore valable si $x \geqslant y$. On a donc démontré que pour tous réels x et y de $[0, 1]$, $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \leqslant |y - x|$ ou encore $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

Soit alors $\alpha = \varepsilon^2 > 0$. Soient x et y deux réels de $[0, 1]$ tels que $|x - y| < \alpha$. On a

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y - x|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| < \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| < \varepsilon\right),$$

et donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Remarque. Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème de Heine permet d'affirmer directement que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur le segment $[0, 1]$.

2) Soient x et y deux réels de $[1, +\infty[$.

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{|y - x|}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}|y - x|.$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ et en particulier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

3) Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est uniformément continue sur $[0, 1]$, $\exists \alpha_1 > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.
Puisque f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, $\exists \alpha_2 > 0/\ \forall (x, y) \in [1, +\infty[^2,\ \left(|x - y| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ tel que $|x - y| < \alpha$.

- Si x et y sont dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned}|x - y| < \alpha &\Rightarrow |x - y| < \alpha_1 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_1)\\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon).\end{aligned}$$

- Si x et y sont dans $[1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}|x - y| < \alpha &\Rightarrow |x - y| < \alpha_2 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_2)\\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon).\end{aligned}$$

- Si par exemple, $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant y$, alors $|x - 1| \leqslant |x - y| < \alpha \leqslant \alpha_1$ et donc $|f(x) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|y - 1| \leqslant |x - y| < \alpha \leqslant \alpha_2$

et donc $|f(y) - f(1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Mais alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ et donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice n° 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sqrt{2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

- Pour tout entier naturel n, $y_n - x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} - \sqrt{2n\pi} = \dfrac{\pi/2}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} + \sqrt{2n\pi}}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$.
- Pour tout entier naturel n, $f(y_n) - f(x_n) = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(y_n) - f(x_n)) = 1 \neq 0$.

On a trouvé deux suites de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On sait alors que la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice n° 9

Posons $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left(x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$.

Soit $(x, y) \in [A, +\infty[^2$. Alors, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \dfrac{2\varepsilon}{3}$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.
Donc, $\exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, A]^2,\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x - y| < \alpha$.

- Si $(x, y) \in [0, A]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
- Si $(x, y) \in [A, +\infty[^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
- Si enfin on a $0 \leqslant x \leqslant A \leqslant y$ alors, puisque $|A - x| \leqslant |x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(A)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A, +\infty[$, on a $|f(y) - f(A)| < \dfrac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice n° 10

Soit T une période strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, T]$. M est encore un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.
f est continue sur le segment $[0, T]$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in]0, T[/\ \forall (x, y) \in [0, T]^2,\ \left(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soient x et y deux réels tels que $|x - y| < \alpha$.

- S'il existe un entier naturel k tel que $(x, y) \in [kT, (k + 1)T]^2$, alors $x - kT \in [0, T]$, $y - kT \in [0, T]$, puis $|(x - kT) - (y - kT)| = |y - x| < \alpha$ et donc $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
- Sinon, en supposant par exemple que $x \leqslant y$, puisque l'on a choisi $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}/\ (k - 1)T \leqslant x \leqslant kT \leqslant y \leqslant (k + 1)T.$$

Mais alors, $|x - kT| \leqslant |y - x| < \alpha$ et $|y - kT| \leqslant |y - x| < \alpha$. Par suite,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(kT)| + |f(y) - f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x-y|<\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (|x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Puisque $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, on a $f(0)=0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x)+f(x)=f(-x+x)=f(0)=0$ et donc, pour tout réel x, $f(-x)=-f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$f(nx)=f(x)+\ldots+f(x)=nf(x).$$

De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ f(nx)=nf(x).$$

Soit $a=f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)=f(n\times1)=nf(1)=an$.
Puis, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $nf\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(n\times\frac{1}{n}\right)=f(1)=a$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=a\frac{1}{n}$.
Puis, pour $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=pa\frac{1}{q}=a\frac{p}{q}$. Finalement,

$$\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=ar.$$

Si on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x.
f étant continue en x, on a :

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty}r_n\right)=\lim_{n\to+\infty}f(r_n)=\lim_{n\to+\infty}ar_n=ax.$$

f est donc une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

Exercice n° 12

On a $0\leqslant f(0)\leqslant1$ et $0\leqslant f(1)\leqslant1$. Donc $|f(1)-f(0)|\leqslant1$. Mais, par hypothèse, $|f(1)-f(0)|\geqslant1$. Par suite, $|f(1)-f(0)|=1$ et nécessairement, $(f(0),f(1))\in\{(0,1),(1,0)\}$.

Supposons que $f(0)=0$ et $f(1)=1$ et montrons que $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x$.
Soit $x\in[0,1]$. On a $|f(x)-f(0)|\geqslant|x-0|$ ce qui fournit $f(x)\geqslant x$. On a aussi $|f(x)-f(1)|\geqslant|x-1|$ ce qui fournit $1-f(x)\geqslant1-x$ et donc $f(x)\leqslant x$. Finalement, $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x$ et $f=Id$.

Si $f(0)=1$ et $f(1)=0$, posons pour $x\in[0,1]$, $g(x)=1-f(x)$. Alors, $g(0)=0$, $g(1)=1$ puis, pour $x\in[0,1]$, $g(x)\in[0,1]$. Enfin,

$$\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |g(y)-g(x)|=|f(y)-f(x)|\geqslant|y-x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g=Id$ et donc $f=1-Id$. Réciproquement, Id et $1-Id$ sont bien bien solutions du problème.

Exercice n° 13

Id est solution.
Réciproquement, soit f une bijection de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x\in[0,1],\ f(2x-f(x))=x$. Nécessairement, $\forall x\in[0,1],\ 0\leqslant2x-f(x)\leqslant1$ et donc $\forall x\in[0,1],\ 2x-1\leqslant f(x)\leqslant2x$.

Soit f^{-1} la réciproque de f.

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,1],\ f(2x-f(x))=x&\Leftrightarrow\forall x\in[0,1],\ 2x-f(x)=f^{-1}(x)\\&\Leftrightarrow\forall y\in[0,1],\ f(f(y))-2f(y)+y=0\ (\text{car }\forall x\in[0,1],\ \exists!y\ [0,1]/\ x=f(y))\end{aligned}$$

Soit $y\in[0,1]$ et $u_0=y$. En posant $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0,1]$ (car $[0,1]$ est stable par f). La condition $\forall y\in[0,1],\ f(f(y))-2f(y)+y=0$ fournit $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$, ou encore

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.
En particulier, $u_1 = u_0$ ce qui fournit $f(y) = y$. On a montré que $\forall y \in [0, 1],\ f(y) = y$ et donc $f = \mathrm{Id}$.

Exercice n° 14

1) Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, posons $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$.

g est définie et continue sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $g\left(\dfrac{k}{n}\right) = 0$, on a trouvé un réel x de $[0, 1]$ tel que $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$ (à savoir $x = \dfrac{k}{n}$).

Sinon, tous les $g\left(\dfrac{k}{n}\right)$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$.

2) Soit $a \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = \left|\sin\dfrac{\pi x}{a}\right| - x\left|\sin\dfrac{\pi}{a}\right|$. f est continue sur $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ mais pour tout réel x,

$$f(x+a) - f(x) = \left(\left|\sin\frac{\pi(x+a)}{a}\right| - \left|\sin\frac{\pi x}{a}\right|\right) - ((x+a) - x)\left|\sin\frac{\pi}{a}\right| = -a\left|\sin\frac{\pi}{a}\right| \neq 0.$$

3) a) et b) Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis, pour $t \in [0, 1]$, $f(t) = g(t) - 20t$. f est continue sur $[0, 1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérifie $f(0) = f(1) = 0$.

D'après 1), $\exists t_1 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\exists t_2 \in \left[0, \dfrac{19}{20}\right]$ tels que $f\left(t_1 + \dfrac{1}{2}\right) = f(t_1)$ et $f\left(t_2 + \dfrac{1}{20}\right) = f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g\left(t_1 + \dfrac{1}{2}\right) - g(t_1) = 10$ et $g\left(t_2 + \dfrac{1}{20}\right) - g(t_2) = 1$.

De t_1 à $t_1 + \dfrac{1}{2}$, le cycliste a roulé 10 km et de t_2 à $t_2 + \dfrac{1}{20}$, le cycliste a roulé 1 km.

c) Posons pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(t) = \left|\sin\dfrac{4\pi t}{3}\right| - \dfrac{t\sqrt{3}}{2}$ (de sorte que $f(0) = f(1) = 0$) et donc, $g(t) = \left|\sin\dfrac{4\pi t}{3}\right| + \left(20 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)t$.

$\forall t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, $f\left(t + \dfrac{3}{4}\right) - f(t) = \dfrac{3}{4}\left(20 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq 0$ ou encore $g\left(t + \dfrac{3}{4}\right) - g(t) \neq 15$.

