

Planche n° 20. Limites. Continuité en un point

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**T)

Montrer en revenant à la définition que $f : x \mapsto \frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Exercice n° 2 (*I)

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonction $\text{Min}\{f, g\}$ et $\text{Max}\{f, g\}$ sont continues en x_0 .

Exercice n° 3 (**IT)

Montrer que la fonction caractéristique de \mathbb{Q} est discontinue en chacun de ses points.

Exercice n° 4 (**IT)

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3) Montrer que la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice n° 5 (**T)

Pour $x \neq 1$, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{a(e^{x-1}-1)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{6x-5}-b}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

f est-elle prolongeable par continuité en 1 (discuter en fonction de a et b) ?

Exercice n° 6 (**)

Trouver f bijective de $[0, 1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Exercice n° 7 (**IT)

Etudier en chaque point de \mathbb{R} l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice n° 8 (*)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et périodique, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice n° 9 (****)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(Indication. Considérer $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.)