

## Planche n° 20. Limites. Continuité en un point : corrigé

### Exercice n° 1

Soit  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ . Pour  $x \neq 5$ ,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5} \right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5| \times |x_0-5|}.$$

Ensuite, pour  $x \in \left] x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2} \right[$  ou encore si  $|x-x_0| < \frac{|x_0-5|}{2}$ , on a  $|x-5| \geq \frac{|x_0-5|}{2}$  (faire un dessin).

Ainsi,

$$\forall x \in \left] x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2} \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha = \min \left\{ \frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28 \times 2} \right\} (> 0)$ . On a

$$\begin{aligned} |x-x_0| < \alpha &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0| \quad (\text{car } |x-x_0| < \frac{|x_0-5|}{2}) \\ &< \frac{28}{(x_0-5)^2} \times \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28 \times 2} \quad (\text{car } |x-x_0| < \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28 \times 2}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}), (|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ .  $f$  est donc continue en chaque point de  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

### Exercice n° 2

$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$  et  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$  sont continues en  $x_0$  en vertu de théorèmes généraux.

### Exercice n° 3

Notons  $\chi_{\mathbb{Q}}$  la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$ . Soit  $x_0$  un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}} \left( x_0 + \frac{1}{n} \right)$  existe,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}} \left( x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)$  existe et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left( x_0 + \frac{1}{n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left( x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)$  (l'une des

deux limites valant 1 et l'autre valant 0) bien que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} = x_0$ . Ainsi, pour tout réel  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  n'a pas de limite en  $x_0$  et est donc discontinue en  $x_0$ .

### Exercice n° 4

1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = 2n\pi$  et  $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_n) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(v_n) = 1$ . Puisque  $1 \neq 0$ , on en déduit que la fonction  $x \mapsto \sin x$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{1}{2n\pi}$  et  $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_n) = 0$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(v_n) = 1$ . Puisque  $1 \neq 0$ , on en déduit que la fonction  $x \mapsto \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0.

3) Pour tout réel non nul  $x$ ,  $\left| x \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| = |x| \times \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|$ . Puisque  $|x|$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, on en déduit que  $x \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

Ainsi, la fonction  $x \mapsto x \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 0 ou encore la fonction  $x \mapsto x \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  est prolongeable par continuité en 0.

### Exercice n° 5

- Si  $x > 1$ ,  $6x - 5 \geq 0$  et donc  $f(x)$  existe. D'autre part si  $x < 1$ ,  $f(x)$  existe et finalement  $f$  est définie sur  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
- Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $x - 1$  tend vers 0 et  $\sqrt{6x - 5} - b$  tend vers  $1 - b$ . Donc, si  $b \neq 1$ , la fonction n'a pas de limite réelle en 1 à droite. Si  $b = 1$ , pour  $x > 1$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{6x - 5} - 1}{x - 1} = \frac{6x - 5 - 1}{(x - 1)(\sqrt{6x - 5} + 1)} = \frac{6}{\sqrt{6x - 5} + 1},$$

et donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{6}{2} = 3$ . Finalement,  $f$  a une limite à gauche en 1 si et seulement si  $b = 1$ . Dorénavant,  $b$  est égal à 1.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \text{ et donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = a.$$

Donc, si  $a \neq 3$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$  et  $f$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 1. Si par contre  $a = 3$ ,  $f$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 ou encore  $f$  est prolongeante par continuité en 1.

En résumé,  $f$  est prolongeante par continuité en 1 si et seulement si  $a = 3$  et  $b = 1$ . Le prolongement encore noté  $f$  est la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{3(e^{x-1} - 1)}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{\sqrt{6x - 5} - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3(e^{x-1} - 1)}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{6}{\sqrt{6x - 5} + 1} & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

### Exercice n° 6

$$\text{Pour } x \in [0, 1], \text{ posons } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \\ 1 - x & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

$f$  est bien une application définie sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . De plus, si  $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ , alors  $f(f(x)) = f(x) = x$ . Si  $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ , alors  $1 - x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$  et donc  $f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$ .

$$\text{Enfin, } f(f(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = \frac{1}{2}.$$

Finalement,  $f \circ f = \text{Id}_{[0, 1]}$  et  $f$ , étant une involution de  $[0, 1]$ , fest une permutation de  $[0, 1]$ .

Soit  $a$  un réel de  $[0, 1]$ . On note que  $\lim_{x \rightarrow a, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} f(x) = 1 - a$  et  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}} f(x) = a$ . Donc, si  $f$  a une limite en  $a$ ,

nécessairement  $1 - a = a$  et donc  $a = \frac{1}{2}$ . Ceci montre déjà que  $f$  est discontinue en tout réel de  $[0, 1]$  distinct de  $\frac{1}{2}$ . D'autre

part, si  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}, x \neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$  et donc  $f$  est discontinue en tout point de  $[0, 1]$ .

### Exercice n° 7

Donnons tout d'abord une expression plus explicite de  $f(x)$  pour chaque réel  $x$ .

- Si  $x > 1$ , alors  $\frac{1}{x} \in ]0, 1[$  et donc,  $f(x) = 0$ .
- Si  $\exists p \in \mathbb{N}^* / x \in \left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$ ,  $f(x) = px$ .
- $f(0) = 1$  et plus généralement,  $\forall p \in \mathbb{Z}^*$ ,  $f\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ .
- Si  $x \leq -1$ , alors  $\frac{1}{x} \in [-1, 0[$  et donc,  $f(x) = -x$ .
- Enfin, si  $\exists p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  tel que  $x \in \left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$ , alors  $\frac{1}{p+1} < x \leq \frac{1}{p} (< 0)$  fournit, par décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $] -\infty, 0[$ ,  $p \leq \frac{1}{x} < p + 1 (< 0)$  et donc  $f(x) = px$ .

**Etude en 0.**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$  et donc  $1 - x < f(x) \leq 1$  si  $x > 0$  et  $1 \leq f(x) < 1 - x$  si  $x < 0$ . Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - 1| \leq |x|,$$

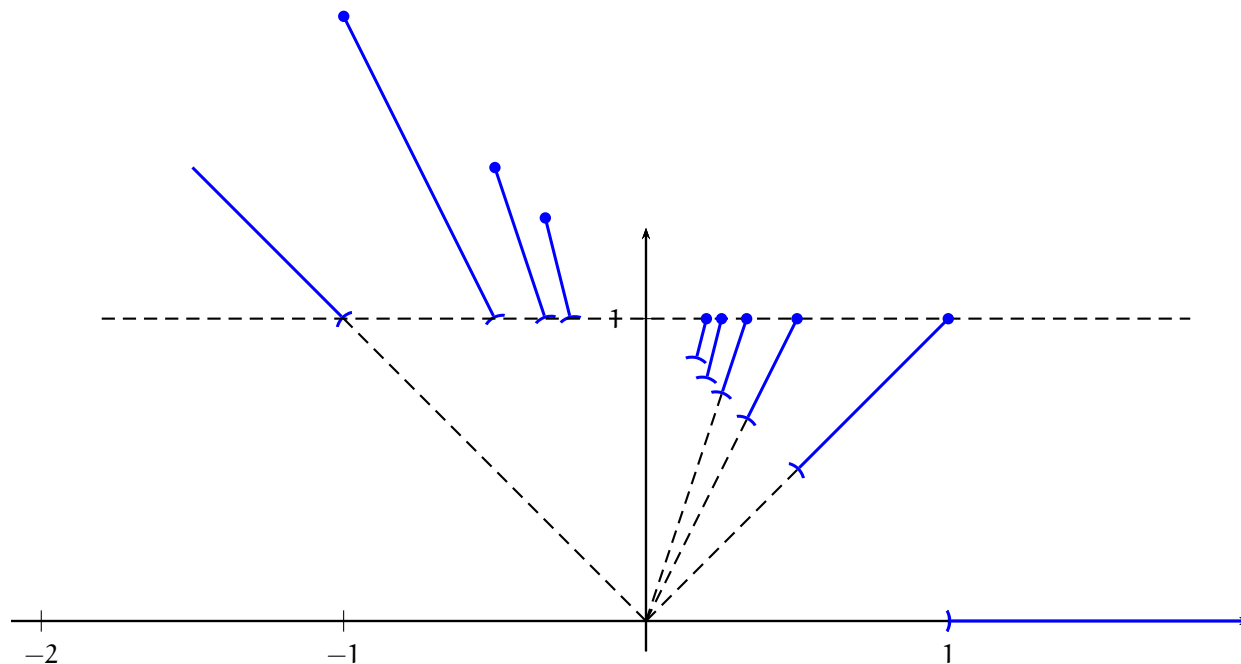
et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .  $f$  est donc continue en 0.

$f$  est affine sur chaque intervalle de la forme  $\left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$  pour  $p$  élément de  $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$  et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque  $\frac{1}{p}$ .  $f$  est affine sur  $] -\infty, -1]$  et aussi sur  $]1, +\infty[$  et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en  $\frac{1}{p}$ , pour  $p$  entier relatif non nul donné. Mais,

$$f\left(\frac{1}{p}^+\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}, x > \frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f\left(\frac{1}{p}\right).$$

$f$  est donc discontinue à droite en tout  $\frac{1}{p}$  où  $p$  est un entier relatif non nul donné.

**Graphes de  $f$  :**



### Exercice n° 8

Soit  $T$  une période strictement positive de  $f$ . On note  $\ell$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Soit  $x_0$  un réel.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_0) = f(x_0 + nT)$  et quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , puisque  $T > 0$ , on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ell$  et donc  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 9

Pour  $x \neq 0$ , posons  $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ .  $f$  est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe  $a > 0$  tel que  $] -a, a[ \subset D_f$ .

Mais alors,  $\left] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right[ \setminus \{0\} \subset D_g$ .

Soit  $x \in \left] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right[ \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Par suite, pour  $x \in ]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[\setminus\{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque par hypothèse,  $g$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0,

$$\exists \alpha \in ]0, \frac{\alpha}{2}[ \quad / \quad \forall X \in ]-\alpha, \alpha[, |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour  $x \in ]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$  et pour  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\frac{x}{2^k}$  est dans  $]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$  et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc,  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|$ . On a ainsi montré que

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Mais, à  $x$  fixé,  $\frac{f(x/2^n)}{x}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc, on peut choisir  $n$  tel que  $\left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ce que l'on

fait. On a alors  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, \left( 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon \right),$$

ce qui montre que ( $f$  est dérivable en 0 et que)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .