Planche n° 19. Comparaison des suites en l'infini

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*I)**

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1) $\text{Arccos}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ **2)** $\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **3)** $\text{ch}\left(\sqrt{n}\right)$ **4)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ **5)** $\dfrac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$

6) $\left(1+\sqrt{n}\right)^{-\sqrt{n}}$ **7)** $\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ **8)** $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/5}-(\text{Arctan}\,n)^{3/5}$ **9)** $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

Exercice n° 2 (I)**

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$.

Exercice n° 3 (*I)**

1) Soient u et v deux suites réelles strictement positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

2) Application. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

Exercice n° 4 (****)

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle. Montrer que si $u_n + u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
A-t-on : si $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$?

Exercice n° 5 (*I)**

Soit u la suite définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante de limite nulle.

2) On admet que si u est une suite de limite nulle, alors, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)$.
Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite réelle non nulle.
En appliquant le lemme de Césaro à la suite (v_n), déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 6 (I)**

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

