Planche n° 19. Comparaison des suites en l'infini : corrigé

Exercice n° 1

1) Tout d'abord, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n}$ existe et est élément de $[-1,1]$. Donc, $\text{Arccos}\,\dfrac{n-1}{n}$ existe pour tout entier naturel non nul n.

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n-1}{n}$ tend vers 1 et donc $\text{Arccos}\,\dfrac{n-1}{n}$ tend vers 0. Mais alors,

$$\text{Arccos}\,\frac{n-1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \sin\left(\text{Arccos}\,\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

2) $\text{Arccos}\,\dfrac{1}{n}$ tend vers $\dfrac{\pi}{2} \neq 0$ et donc $\text{Arccos}\,\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

3) $\text{ch}\left(\sqrt{n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{n}}$.

4) $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n} = 1$ et donc, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers e. Par suite, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} e$.

5) Pour tout entier naturel n, $n^2+1 \geqslant 0$ et donc $\sqrt{n^2+1}$ existe puis $n+\sqrt{n^2+1} > 0$ et donc $\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)$ existe.

Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $n^4+n^2-1 \geqslant n^4 > 0$, $\dfrac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$ existe pour $n \geqslant 1$.

$$\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Donc, $\dfrac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4+n^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \dfrac{\ln n}{n^2}$.

6)

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n}+1\right) &= -\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n}\right) - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} -\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n}\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} -\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n}\right) - 1 + o(1),
\end{aligned}$$

et donc

$$(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$

7) $\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\left(\ln\sin\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\cos\dfrac{1}{n}-1\right)\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(-\dfrac{1}{2n^2}\right)(-\ln n) = \dfrac{\ln n}{2n^2}$.

8) $(\text{Arctan}\,n)^{3/5} = \left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,\dfrac{1}{n}\right)^{3/5} \underset{+\infty}{=} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/5}\left(1-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)^{3/5} \underset{+\infty}{=} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/5}\left(1-\dfrac{6}{5n\pi}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, et donc

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5} - (\text{Arctan}\,n)^{3/5} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5}\left(1-1+\frac{6}{5n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5}\frac{6}{5n\pi}$$

9) Tout d'abord, pour $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$, et donc $1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 0$, puis $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ existe. Ensuite,

$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice n° 2

Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{k!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)...(k+1)} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ (le produit contenant au moins les deux premiers facteurs). Par suite,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leqslant \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\dfrac{1}{n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$ tend vers 1 et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!.$$

Exercice n° 3

1) Soit $\varepsilon > 0$. Les suites u et v sont équivalentes et la suite v est strictement positive. Donc, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}v_n$. Soit $n > n_0$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| &= \frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leqslant \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n}|u_k - v_k| \leqslant \frac{1}{V_n}\left(\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0+1}^{n} v_k\right)\\ &\leqslant \frac{1}{V_n}\left(\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}V_n\right) = \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Maintenant, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k|$ est constante quand n varie et d'autre part, V_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $\displaystyle\frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\left|\dfrac{U_n}{V_n} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \varepsilon\right).$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

2) • Equivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}.$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) > 0$, de plus quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après 1),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

• Equivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$.

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n = (n+1-n)\ln n+(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n+1+o(1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1)-k\ln k) = (n+1)\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ et que les suites considérées sont positives et équivalentes, on en déduit que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n}\ln k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1)-k\ln k) = (n+1)\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Exercice n° 4

• Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\dfrac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned} n\left(u_n+u_{n+1}-\frac{2}{n}\right) &= 1+\frac{n}{n+1}-2+n(-1)^n\left(\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n n(\ln(n+1)-\ln n)}{\ln n\ln(n+1)}+o(1)\\ &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n n\ln(1+1/n)}{\ln n\ln(n+1)}+o(1) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n(1+o(1))}{\ln n\ln(n+1)}+o(1) \underset{+\infty}{=} o(1).\end{aligned}$$

Donc, $n\left(u_n+u_{n+1}-\dfrac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{=} o(1)$, ou encore $u_n+u_{n+1} = \dfrac{2}{n}+o(\dfrac{1}{n})$, ou enfin, $u_n+u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$. Pourtant, u_n est équivalent à $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ et pas du tout à $\dfrac{1}{n}$ ($|nu_n| = \dfrac{n}{\ln n} \to +\infty$).

• Supposons maintenant que $u_n+u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}$ et montrons que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

On pose $v_n = u_n-\dfrac{1}{n}$. Il s'agit maintenant de montrer que $v_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sous l'hypothèse $v_n+v_{2n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $n\,|v_n+v_{2n}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Soient $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |v_n| &= |v_n+v_{2n}-v_{2n}-v_{4n}+\ldots+(-1)^p(v_{2^pn}+v_{2^{p+1}n})+(-1)^{p+1}v_{2^{p+1}n}|\\ &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{p}|v_{2^kn}+v_{2^{k+1}n}|\right)+|v_{2^{p+1}n}| < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^kn}+|v_{2^{p+1}n}| = \frac{\varepsilon}{4n}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}}+|v_{2^{p+1}n}|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2n}+|v_{2^{p+1}n}|\end{aligned}$$

Maintenant, la suite u tend vers 0, et il en est de même de la suite v. Par suite, pour chaque $n \geqslant n_0$, il est possible de choisir p tel que $|v_{2^{p+1}n}| < \dfrac{\varepsilon}{2n}$.

En résumé, si n est un entier donné supérieur ou égal à n_0, $n|v_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |nv_n| < \varepsilon).$$

Par suite, $v_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ou encore $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice n° 5

1) Il est immédiat par récurrence que la suite u est définie et à valeurs dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On sait que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x < x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante. Puisque la suite u est d'autre part minorée par 0, la suite u converge vers un réel noté ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}$. Mais alors, par continuité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en particulier en ℓ, on a

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sin(u_n) = \sin\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = \sin(\ell).$$

Or, si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ et en particulier $\sin x \neq x$. Donc, $\ell = 0$.

La suite u est strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{\alpha} = (\sin(u_n))^{\alpha} &\underset{+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)\right)^{\alpha} \underset{+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{\alpha} \underset{+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} u_n^{\alpha} - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}). \end{aligned}$$

et donc, $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$. En prenant $\alpha = -2$, on obtient alors

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de Césaro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend également vers $\frac{1}{3}$. Mais,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Ainsi, $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$ puis, $\frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n)$. Donc, $\frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$, puis $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et enfin, puisque la suite u est strictement positive,

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Exercice n° 6

Soit $n \geqslant 1$.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Mais alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} (\ln(2n) + \gamma) - (\ln(n) + \gamma) + o(1)\ (\ln(2n) + \gamma) \ln 2 + o(1),$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2.}$$

