

Planche n° 19. Comparaison des suites en l'infini : corrigé

Exercice n° 1

1) Tout d'abord, pour $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n}$ existe et est élément de $[-1, 1]$. Donc, $\text{Arccos} \frac{n-1}{n}$ existe pour tout entier naturel non nul n .

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{n-1}{n}$ tend vers 1 et donc $\text{Arccos} \frac{n-1}{n}$ tend vers 0. Mais alors,

$$\text{Arccos} \frac{n-1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \sin \left(\text{Arccos} \frac{n-1}{n} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

2) $\text{Arccos} \frac{1}{n}$ tend vers $\frac{\pi}{2} \neq 0$ et donc $\text{Arccos} \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

3) $\text{ch}(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} (e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{\sqrt{n}}$.

4) $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$ et donc, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$ tend vers e . Par suite, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \underset{+\infty}{\sim} e$.

5) Pour tout entier naturel n , $n^2 + 1 \geq 0$ et donc $\sqrt{n^2 + 1}$ existe puis $n + \sqrt{n^2 + 1} > 0$ et donc $\ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$ existe.

Ensuite, pour $n \geq 1$, $n^4 + n^2 - 1 \geq n^4 > 0$, $\frac{\ln(n + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$ existe pour $n \geq 1$.

$$\ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n + n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Donc, $\frac{\ln(n + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \frac{\ln n}{n^2}$.

6)

$$\begin{aligned} -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n} + 1) &= -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\underset{+\infty}{=} -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - 1 + o(1), \end{aligned}$$

et donc

$$(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} e^{-\sqrt{n} \ln(\sqrt{n} + 1) + o(1)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - 1} = \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$

7) $\ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \left(\ln \sin \frac{1}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \left(-\frac{1}{2n^2} \right) (-\ln n) = \frac{\ln n}{2n^2}$.

8) $(\text{Arctan } n)^{3/5} = \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{1}{n} \right)^{3/5} \underset{+\infty}{=} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \left(1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right)^{3/5} \underset{+\infty}{=} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \left(1 - \frac{6}{5n\pi} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)$, et donc

$$\left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} - (\text{Arctan } n)^{3/5} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \left(1 - 1 + \frac{6}{5n\pi} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \sim \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \frac{6}{5n\pi}$$

9) Tout d'abord, pour $n \geq 1$, $\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$, et donc $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq 0$, puis $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ existe. Ensuite,

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice n° 2

Pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}.$$

Pour $0 \leq k \leq n-2$, $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ (le produit contenant au moins les deux premiers facteurs). Par suite,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en

déduit que $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ tend vers 1 et donc que

$$\sum_{k=0}^n k! \underset{+\infty}{\sim} n!.$$

Exercice n° 3

1) Soit $\varepsilon > 0$. Les suites u et v sont équivalentes et la suite v est strictement positive. Donc, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} v_n$. Soit $n > n_0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| &= \frac{|u_n - v_n|}{v_n} \leq \frac{1}{v_n} \sum_{k=0}^n |u_k - v_k| \leq \frac{1}{v_n} \left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0+1}^n v_k \right) \\ &\leq \frac{1}{v_n} \left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} v_n \right) = \frac{1}{v_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, l'expression $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ est constante quand n varie et d'autre part, v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers

$+\infty$. On en déduit que $\frac{1}{v_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que,

pour $n \geq n_1$, $\frac{1}{v_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_1$, on a alors $\left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \varepsilon \right).$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

2) • Equivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}.$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 0$, de plus quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ et enfin, $\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après 1),

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

• Equivalent de $\sum_{k=1}^n \ln(k)$.

$$(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = (n+1-n)\ln n + (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + 1 + o(1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Comme $\sum_{k=1}^n ((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ et que les suites considérées sont positives et équivalentes, on en déduit que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n ((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Exercice n° 4

• Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned} n\left(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}\right) &= 1 + \frac{n}{n+1} - 2 + n(-1)^n \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n n(\ln(n+1) - \ln n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n n \ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n (1+o(1))}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \underset{+\infty}{=} o(1). \end{aligned}$$

Donc, $n\left(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{=} o(1)$, ou encore $u_n + u_{n+1} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou enfin, $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Pourtant, u_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ et pas du tout à $\frac{1}{n}$ ($|\ln u_n| = \frac{n}{\ln n} \rightarrow +\infty$).

• Supposons maintenant que $u_n + u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n}$ et montrons que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Il s'agit maintenant de montrer que $v_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ sous l'hypothèse $v_n + v_{2n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $n|v_n + v_{2n}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Soient $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |v_n| &= |v_n + v_{2n} - v_{2n} - v_{4n} + \dots + (-1)^p (v_{2^p n} + v_{2^{p+1} n}) + (-1)^{p+1} v_{2^{p+1} n}| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^p |v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n}|\right) + |v_{2^{p+1} n}| < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=0}^p \frac{1}{2^k n} + |v_{2^{p+1} n}| = \frac{\varepsilon}{4n} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + |v_{2^{p+1} n}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n} + |v_{2^{p+1} n}| \end{aligned}$$

Maintenant, la suite u tend vers 0, et il en est de même de la suite v . Par suite, pour chaque $n \geq n_0$, il est possible de choisir p tel que $|v_{2^{p+1} n}| < \frac{\varepsilon}{2n}$.

En résumé, si n est un entier donné supérieur ou égal à n_0 , $n|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |nv_n| < \varepsilon).$$

Par suite, $v_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou encore $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice n° 5

1) Il est immédiat par récurrence que la suite u est définie et à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On sait que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x < x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante. Puisque la suite u est d'autre part minorée par 0, la suite u converge vers un réel noté ℓ . Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$. Mais alors, par continuité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et en particulier en ℓ , on a

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_n) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = \sin(\ell).$$

Or, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$ et en particulier $\sin x \neq x$. Donc, $\ell = 0$.

La suite u est strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha &= (\sin(u_n))^\alpha \underset{+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha \underset{+\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha \underset{+\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} u_n^\alpha - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}). \end{aligned}$$

et donc, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{+\infty}{=} -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$. En prenant $\alpha = -2$, on obtient alors

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CÉSARO, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend également vers $\frac{1}{3}$. Mais,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Ainsi, $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$ puis, $\frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n)$. Donc, $\frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$, puis $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et enfin, puisque la suite u est strictement positive,

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Exercice n° 6

Soit $n \geq 1$.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Mais alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} (\ln(2n) + \gamma) - (\ln(n) + \gamma) + o(1) = (\ln(2n) + \gamma) \ln 2 + o(1),$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.}$$