Planche n° 18. Suites : corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0.

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| = 0$. Par suite, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $|v_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

La réciproque est fausse. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2) Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $|u_n| \leqslant M$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}M = \frac{1}{n+1}(n+1)M = M.$$

La suite v est donc bornée.

La réciproque est fausse. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n E\left(\dfrac{n}{2}\right) = \begin{cases} p \text{ si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\ -p \text{ si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$.
u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \dfrac{1}{n+1}u_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n}{2}$, et dans tous les cas $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3) Si u est croissante, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n+1}u_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n}u_k\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}u_k) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

Exercice n° 2

Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$).
Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$.

Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0, $u_n \geqslant 2A$. Pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a alors,

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \dfrac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel

$$v_n \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A.$$

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_1 \Rightarrow v_n > A)$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

Exercice n° 3

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0;+\infty[$ et donc, pour k entier naturel non nul donné, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx =\leqslant (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ et, pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$.

En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geqslant 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

cette inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.}$$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) + \infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$

2) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right)\,dx \leqslant 0$$

car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroit sur $[n, n+1]$ et donc, pour tout x de $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right)\,dx \geq 0$$

car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroit sur $[n+1, n+2]$. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et donc la suite $u - v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, la suite u décroît, la suite v croît et la suite $u-v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$, et en particulier, $v_3 \leqslant \gamma \leqslant u_1$ avec $v_3 = 0,5...$ et $u_1 = 1$. Donc, $\gamma \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Pour n entier naturel non nul donné, on a :

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant e^{0,01} - 1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,01}-1} = 99,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 100.$$

Donc $0 \leqslant \gamma - v_{100} \leqslant 10^{-2}$. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément, $\gamma = 0,5772156649\ldots$ (γ est la constante d'Euler).

Exercice n° 4

Soit r la raison de la suite u. Pour tout entier naturel k, on a $\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}} = r\dfrac{1}{u_k u_{k+1}}$. En sommant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} r\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{u_{n+1}-u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Si $r \neq 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, et si $r = 0$, u est constante et le résultat est immédiat.

Exercice n° 5

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} &= \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} \\ &= \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$(*) \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{array}\right.,$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, d'après l'exercice n° 3, il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ telle que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$. Pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = H_n - 1 + \frac{1}{n+1} = \ln n + \gamma - 1 + \frac{1}{n+1} + \varepsilon_n,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = 2\ln n + 2\gamma - 1 + \frac{1}{n+1} + 2\varepsilon_n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}&=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=-1+H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n\\&=\ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+\varepsilon_{2n+1}-\frac{1}{2}\varepsilon_n\\&=\ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+\varepsilon_{2n+1}-\frac{1}{2}\varepsilon_n\\&=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\varepsilon_{2n+1}-\frac{1}{2}\varepsilon_n\end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}&=6\left(2\ln n+2\gamma-1\right)-24\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)-24\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-24\varepsilon_{2n+1}\\&=6(3-4\ln 2)-24\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-24\varepsilon_{2n+1}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}=6(3-4\ln 2).}$$

Exercice n° 6

Puisque a et b sont positifs, par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n et v_n existent et sont positifs.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n-u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}+v_{n-1}\right)-\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}+v_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v_{n-1}}-\sqrt{u_{n-1}}\right)^2\geqslant 0.$$

Ceci reste vrai quand $n=0$ car $a<b$ et donc, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant v_n$.

Ensuite, pour tout entier naturel n,

- $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_nv_n}-u_n=\sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)\geqslant 0$;
- $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2}\left(u_n+v_n\right)-v_n=\dfrac{1}{2}\left(u_n-v_n\right)\leqslant 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
D'autre part, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant v_n\leqslant v_0$ et donc la suite (u_n) est majorée par v_0. De même la suite (v_n) est minorée par u_0. On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers des réels positifs.

Notons ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (u_n) et (v_n). On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $\dfrac{1}{2}\left(u_n+v_n\right)=u_{n+1}$ et on obtient $\dfrac{1}{2}\left(\ell+\ell'\right)=\ell$ ou encore $\ell=\ell'$.

Exercice n° 7

Posons $\alpha=\text{Arccos}\,\dfrac{a}{b}$. α existe car $0<\dfrac{a}{b}<1$ et est élément de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, $a=b\cos\alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n, $\dfrac{\alpha}{2^n}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\cos\dfrac{\alpha}{2^n}>0$.

On a $u_0=b\cos\alpha$ et $v_0=b$ puis $u_1=\dfrac{1}{2}(u_0+v_0)=\dfrac{b}{2}(1+\cos\alpha)=b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ et $v_1=\sqrt{u_1v_0}=\sqrt{b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\times b}=b\cos\dfrac{\alpha}{2}$ puis $u_2=\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)=b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2}$ puis $v_2=\sqrt{b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2}b\cos\dfrac{\alpha}{2}}=b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n=b\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n=v_n\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$.

C'est vrai pour $n = 1$ et si pour $n \geqslant 1$, on a $v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n\cos\frac{\alpha}{2^n} + v_n\right) = v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\ (\text{car }\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

et donc $v_{n+1} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1} = v_{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\text{ et }u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} = b\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{b\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}\times\frac{1}{\left(\sin\frac{\alpha}{2^n}\right)/\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}\lim_{X\to 0}\frac{1}{\sin X/X} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$, puis $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n} \to \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$.

Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $\frac{b\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\mathrm{Arccos}\,\frac{a}{b}}$.

Exercice n° 8

$\ell \in [0,1[$ et donc $\frac{1-\ell}{2} > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$.

Soit $n \geqslant n_0 + 1$.

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_{n_0}|\prod_{k=n_0}^{n-1}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\ (\text{produit télescopique}) \\ &|u_{n_0}|\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{1+\ell}{2} = |u_{n_0}|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Puisque $\ell \in [0,1[$, $\frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$. Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $|u_{n_0}|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}$ tend vers 0 et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n° 9

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $\frac{\sin}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

2) $\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)=n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\to}1$. Donc, $\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1=e$.

3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{n!}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}e^{-n\ln(1+1/n)}=e^{-1}.$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{e}=0,36...<1$. On sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ (voir exercice n° 8).

4) Pour $n\geqslant 1$,

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant u_n\leqslant\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}.$$

Or, $\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$ et $\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

5) $\sqrt[n]{n^2}=e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)}=e^{\frac{2\ln n}{n}}$. Donc quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers $e^0=1$.

6) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$.

7) $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\to\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

8) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2^{k/2^k}=2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$. Pour tout réel x,

$$f(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right)'(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right)'(x).$$

Pour $x\neq 1$, on a donc

$$f(x)=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x)=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}+1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}\to 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n}2^{k/2^k}\to 2^{\frac{1}{2}\times 4}=4.$$

Exercice n° 10

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$4(n+u_n) = \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2 \Leftrightarrow u_n = -n+\frac{1}{4}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}\left(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right).$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Exercice n° 11

1) Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n-3}{u_n} = 3\frac{u_n-1}{u_n}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n, $\frac{u_n-1}{u_n} = 3^n\frac{u_0-1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0-3^n(u_0-1)}$.

2) Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n}-2} = \frac{u_n}{2(u_n-2)} = \frac{u_n-2+2}{2(u_n-2)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{u_n-2}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{u_n-2} = \frac{n}{2}+\frac{1}{u_0-2}$ puis $u_n = 2+\frac{2(u_0-2)}{(u_0-2)n+2}$.

Exercice n° 12

Pour tout entier naturel n, on a $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}-u_n = \frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-v_n = -\frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n-u_n) \end{array}\right.$.

La dernière égalité montre que la suite $v-u$ garde un signe constant puis, puisque pour tout naturel n,

$$\text{sgn}(u_{n+1}-u_n) = \text{sgn}(v_n-u_n) \text{ et } \text{sgn}(v_{n+1}-v_n) = -\text{sgn}(v_n-u_n),$$

les suites u et v sont monotones de sens de variation opposés.

Si par exemple $u_0 \leqslant v_0$, alors, pour tout naturel n, on a :

$$u_0 \leqslant u_n \leq u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ'. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \frac{2\ell+\ell'}{3}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0 > v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v.

Calcul des suites u et v. Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1} - un + 1 = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La suite $v - u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n, on a donc $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$.
D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La suite $v + u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, on a $v_n + u_n = v_0 + u_0$.

En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right).$$

En particulier, $\ell = \ell' = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

Exercice n° 13

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ et donc, pour tout entier naturel n,

$$u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0).$$

De même, en échangeant les rôles de u, v et w, $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$ et $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation).
On a aussi, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et donc, pour tout naturel n, $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$.

Ainsi, u_n, v_n et w_n sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - u_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{array}\right. .$$

Par suite, pour tout entier naturel n, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0)\right) \\ v_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0)\right) \\ w_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0)\right) \end{array}\right. .$$

En particulier, les suites u, v et w convergent vers $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$.

Exercice n° 14

Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ.

1er cas. Supposons que $0 \leqslant \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$. ε est un réel strictement positif et donc,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}).$$

Pour $n \geqslant n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2ème cas. Supposons que $\ell > 1$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2}).$$

Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha\frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α. Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice n° 15

1) • Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0, 2\ell[$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $n > n_0$, puisque $u_n = u_{n_0}\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}$, on a $u_{n_0}\left(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc

$$(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant (u_{n_0})^{1/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite rend vers $\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $(u_{n_0})^{1/n}(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2})^{-n_0/n}(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}) > \ell - \varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n}(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})^{-n_0/n}(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}) < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon)$ et donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ.

• Soit ε un réel strictement positif. Si $\ell = 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n > n_0$,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant (u_{n_0})^{1/n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-n_0/n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est est donc strictement plus petit que ε à partir d'un certain rang n_1.

2) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par

$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1}b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b).

Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}}b^{\frac{p}{2p+1}} \to \sqrt{ab}$.
Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$ (et en particulier converge).

On a bien sûr $\dfrac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\dfrac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.

3) a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \dbinom{2n}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \dfrac{(3n)!}{n^{2n}n!}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2 \times (n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n\ln(1+1/n)} = e^{-2\ln(1+1/n)/(1/n)}$ tend vers e^{-2}, et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\dfrac{27}{e^2}$.

Exercice n° 16

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v

Exercice n° 17

Si $u_n^2 \to 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \to 0$ et donc $u_n \to 0$.
Si $u_n^2 \to \ell \neq 0$, alors $(u_n) = \left(\dfrac{u_n^3}{u_n^2}\right)$ converge.

Remarque. L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$).

Exercice n° 18

Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives.

Pour tout naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1)\ln(n+2)+n\ln n-(2n+1)\ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1)$.
f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+1}{x+1} - 2\ln(x+1) = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \ln x + \ln(x+2) - 2\ln(x+1).$$

De même, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+1}\\
&= \frac{x(x+1)^2 - x(x+2)^2 + (x+1)^2(x+2)^2 + x(x+1)^2(x+2) - 2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{-2x^2 - 3x + (x^2+2x+1)(x^2+4x+4) + (x^2+2x)(x^2+2x+1) - 2(x^2+x)(x^2+4x+4)}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $x > 0$,

$$f'(x) < \lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+1} + \ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right) = 0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Or, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1)\\
&= (x + (x+1) - (2x+1))\ln x + (x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0-0+2-2=0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout réel $x>0$, on a $f(x)>\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.

f est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)>0$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=e^{f(n)}>1$. La suite u est strictement croissante.

Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x\mapsto\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ sur $]0,+\infty[$.

Je vous laisse montrer de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e, et que $v_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$ tend vers e, les suites u et v sont adjacentes.

Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n=10$, on obtient

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{10}<e<\left(\frac{11}{10}\right)^{11}$$

et donc, $2,59...<e<2,85...$ et pour $n=100$, on obtient $1,01^{100}<e<1,01^{101}$ et donc $2,70...<e<2,73...$ Ces deux suites convergent vers e lentement.

Exercice n° 19

Il est immédiat que u croit strictement et que $v-u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel non nul donné,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)\times(n+1)!}<0,$$

et v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$$

et $n=7$ fournit par exemple $2,71825...<e<2,71828...$).

Exercice n° 20

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\\&>\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&<\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.\end{aligned}$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n-u_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

et la suite $v-u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite .

Exercice n° 21

1) L'équation caractéristique est $4z^2-4z-3=0$. Ses solutions sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme $(u_n)=\left(\lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes).

Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u, λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ -\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{3\mu}{2}=u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\dfrac{1}{4}(3u_0-2u_1)$ et $\mu=\dfrac{1}{4}(u_0+2u_1)$ d'après les formules de Cramer.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

2) Clairement $u_{2n}=\dfrac{u_0}{4^n}$ et $u_{2n+1}=\dfrac{u_1}{4^n}$ et donc $u_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2^n}u_0+2\dfrac{1-(-1)^n}{2^n}u_1\right)$.

3) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a=4a+3a+12$ et donc $a=-4$.
Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4+\lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=4+u_0\\ -\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{3\mu}{2}=4+u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\dfrac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)$ et $\mu=\dfrac{1}{4}(12+u_0+2u_1)$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-4+\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4) La suite $v=\dfrac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2}=v_{n+1}-v_n$ et donc, (v_n) est de la forme $\left(\lambda\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ et donc $u_n=\dfrac{1}{\lambda\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda+\mu 2^n)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
2 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n=an2^n$. Pour $n\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2}&=a(n+2)2^{n+2}-3a(n+1)2^{n+1}+2an2^n\\&=(n(4a-6a+2a)+(8a-6a))\,2^n2a\times 2^n.\end{aligned}$$

Donc

$$u\text{ est solution}\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $\left(-n2^{n-1}+\lambda+\mu 2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 22

- L'égalité proposée est vraie pour $n=2$ car $\cos\dfrac{\pi}{2^2}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Soit $n\geqslant 2$. Supposons que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

Alors, puisque $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)>0$ (car $\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$),

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}},\ (n\text{ radicaux}).$$

On a montré par récurrence que, pour $n\geqslant 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

Ensuite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} = 2^n \times 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\pi \to \pi,$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} = \pi$.

Exercice n° 23

1) Pour x réel positif, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. f et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

et

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $[0,+\infty[$ et en particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$ et de même, $g(x) > g(0) = 0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0,+\infty[$ ou encore,

$$\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x).$$

2) Soit k un entier naturel non nul.

D'après 1), $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k} < \left(1+\dfrac{1}{k}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, ce qui fournit $k\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^{k}}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\frac{n+1}{n}(n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\dfrac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\dfrac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 24

Soit x un irrationnel et $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Donc :

$$\exists A > 0/\ (\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant n_0/\ q_n \geqslant A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée.

La suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. L'une au moins de ces valeurs est prise un infinité de fois car sinon la suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'aurait qu'un nombre fini de termes. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.

La suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} (q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.

Ainsi, on peut extraire de la suite $\left(p_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $((q_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(\dfrac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constante.

Mais la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $\left(\dfrac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Puisque $\left(\dfrac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$ et donc x est rationnel. Contradiction .

Donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Enfin, puisque $|p_n| = \left|\dfrac{p_n}{q_n}\right| q_n$ et que $\left|\dfrac{p_n}{q_n}\right|$ tend vers $|x| > 0$ (car x est irrationnel) et q_n tend vers $+\infty$, la suite $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice n° 25

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$, $u_6 = 0$, $u_7 = 1$, $u_8 = 0$, $u_9 = 0$, $u_{10} = 0$, $u_{11} = 1$... et plus généralement

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 \text{ si } n \text{ est premier} \end{array}\right. .$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geqslant 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geqslant 2$, $u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n-ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geqslant 2$.

Exercice n° 26

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, injective. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1 + E(A))$. m est dans tous les cas un entier naturel strictement supérieur à A. Puisque f est injective, on a card $\left(f^{-1}(\{0, 1, ..., m\}\right) \leqslant m + 1$. En particulier, $f^{-1}(\{0, 1, ..., m\})$ est une partie finie (éventuellement vide) de $\mathbb{N}$.

Posons $n_0 = 1 + \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } f^{-1}(\{0, 1, ..., m\}) = \varnothing \\ \text{Max}\left(f^{-1}(\{0, 1, ..., m\})\right) \text{ sinon} \end{array}\right.$. Par définition de n_0, si $n \geqslant n_0$, n n'est pas élément de $f^{-1}(\{0, 1, ..., m\})$ et donc $f(n) > m > A$.

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice n° 27

Pour n naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.
Pour $x \geqslant 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est ainsi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur

$$f_n\left(\mathbb{R}^+\right) = \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [-1, +\infty[.$$

En particulier,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/\ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée.

Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est croissante et majorée par 1. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ. De plus, l'encadrement $0 < u_n < 1$ fournit par passage à la limite : $\ell \in [0, 1]$.

Si $0 \leqslant \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant \ell + \dfrac{1-\ell}{2} = \dfrac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $1 - u_n = u_n^n \leqslant \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ et quand n tend vers vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leqslant 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leqslant \ell < 1$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Exercice n° 28

1) Posons $a = \dfrac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite u est donc q-périodique et de même la suite v est q-périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante. En effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u. Soit $k \in [\![0, T-1]\!]$. Pour tout entier naturel n, on a $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}|$. En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque $|u_{k+nT} - u_{nT}| \to |\ell - \ell| = 0$, on obtient $u_k = u_0$.
Par périodicité, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ et donc u est constante.

Or, si $a = \dfrac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge, et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

2) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na)\cos a + \cos(na)\sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\dfrac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \dfrac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na)\cos a - \sin(na)\sin a$, on voit que si u converge alors v converge (car $\cos a \neq 0$). Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v. D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

Exercice n° 29

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)$. $\{|\sin(n\alpha)|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel α de $]0,\pi[$, $f(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• Si α est dans $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geqslant \sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

• Si α est dans $\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0-1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha = (n_0-1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geqslant |\sin(n_0\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

• Si α est dans $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n(\pi-\alpha)|) = f(\pi-\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

car $\pi-\alpha$ est dans $]0,\frac{\pi}{3}]$.

On a montré que $\forall\alpha \in]0,\pi[,\ f(\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = \mathrm{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Exercice n° 30

La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}/\ u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \geqslant 0$.

Soit $k \geqslant 0$. Supposons avoir construit des entiers n_0, n_1,..., n_k tels que $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ et $\forall i \in [\![0,k]\!],\ u_{n_i} \geqslant i$.
On ne peut avoir : $\forall n > n_k,\ u_n < k+1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\mathrm{Max}\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_k}, k+1\}$. Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k/\ u_{n_{k+1}} \geqslant k+1$.
On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{n_k} \geqslant k$ et en particulier telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$.

Exercice n° 31

Si u converge vers un réel ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1-\ell) \geqslant \frac{1}{4}$, et donc $\left(\ell - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$ et finalement $\ell = \frac{1}{2}$. Par suite, si u converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0,1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - u_n\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n),$$

et puisque $1-u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.

u est croissante et majorée par 1. Donc u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).

