Planche n° 16. Equations différentielles linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (IT)**

Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1) $x\ln x\, y' + y = x,\ I =]1, +\infty[$ **2)** $xy' + 3y = \dfrac{1}{1+x^2}$ $I =]0, +\infty[$
3) $(1-x)^2y' = (2-x)y$ $I =]-\infty, 1[$ **4)** $x(xy' + y - x) = 1,\ I =]-\infty, 0[$
5) $2xy' + y = x^4,\ I =]-\infty, 0[$ **6)** $y' + 2y = x^2 - 3x,\ I = \mathbb{R}$
7) $y' + y = \dfrac{1}{1+2e^x},\ I = \mathbb{R}$ **8)** $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0,\ I =]0, \pi[$

Exercice n° 2 (IT)**

1) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y\,\text{th}\,x = 0$ prenant la valeur 1 en 0.

2) Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y\,\text{th}\,x = x\,\text{th}\,x$ prenant la valeur 0 en 0.

Exercice n° 3 (*I)**

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-1, +\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice n° 4 (***)

Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercice n° 5 (**)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' - 2y' + 2y = \cos x\,\text{ch}\,x$ 2) $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$ 3) $y'' - 2y' + y = \text{ch}\,x$
4) $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x\sin x,\ k \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice n° 6 (IT)** (d'après Mines d'Alès 2005)

On note (E_1) l'équation différentielle :

$$-x^2z' + xz = z^2.$$

On cherche les solutions de (E_1) sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $I =]1, +\infty[$.

1) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur I d'une équation différentielle linéaire du premier ordre notée (E_2).

2) Résoudre (E_2) sur I puis déterminer les solutions de (E_1) sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $I =]1, +\infty[$.

Exercice n° 7 (IT) (***)**

On considère l'équation différentielle (E) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0, +\infty[$.

1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.

3) Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Exercice n° 8 (***)

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

Exercice n° 9 (IT)** (quelques équations différentielles en physique)

Résoudre :

1) L'équation classique du premier ordre (activité radioactive, cinétique chimique du 1er ordre, freinage avec frottement fluide, circuits RL, ...)

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_\infty}{\tau} \text{ avec } x(0) = x_0$$

où x_∞ et x_0 sont deux réels (ou $\dot{v} + \dfrac{v}{\tau} = \dfrac{v_\infty}{\tau}$ avec $v(0) = v_0$).

2) Equation de la charge d'un condensateur

$$RC\frac{dU}{dt} + U = E \text{ avec } U(0) = U_0.$$

3) Oscillateur harmonique

a) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = A$ où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

4) Circuits RLC

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \dfrac{E}{L}$ avec $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ ($\lambda = \dfrac{R}{2L}$ est le coefficient d'amortissement et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre).

