

# Planche n° 15. Calculs de primitives et d'intégrales

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

**Exercice n° 1. (T)** (utilisation d'un formulaire de primitives)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $3x^3 - 7x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{4}{(\sqrt[4]{x})^7} + \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{4x^4}$ | 2) $(x-1)e^{x^2-2x}$                   |
| 3) $\frac{x}{(x^2-1)^3}$  | 4) $(x^2+3)\sqrt{x^3+9x-5}$            |
| 5) $\frac{2x+1}{(\sqrt[3]{x^2+x+1})^2}$   | 6) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$           |
| 7) $\frac{1}{1+4x^2}$   | 8) $\frac{1}{4+x^2}$                   |
| 9) $\frac{1}{x^2+x+1}$  | 10) $\frac{1}{x \ln x}$                |
| 11) $\frac{1}{1+e^{-x}}$  | 12) $\frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x}$   |
| 13) $\frac{\sin^2(x/2)}{(x - \sin x)^3}$  | 14) $\left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x$ |

**Exercice n° 2. (T)** (intégration par parties pour trouver des primitives)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- |  |                                    |                            |  |                       |
|--|------------------------------------|----------------------------|--|-----------------------|
| 1) $\ln x$   | 2) $x \ln x$                       | 3) $\ln(x+1)$              | 4) $\text{Arcsin } x$                  | 5) $\text{Arctan } x$ |
| 6) $\text{Arccos } x$  | 7) $xe^{-x}$                       | 8) $(x^2-3x+1)e^x$         | 9) $(1-x)e^{-2x}$                      | 10) $\ln(1+x^2)$      |
| 11) $e^{\text{Arccos } x}$                                   | 12) $\cos x \ln(1+\cos x)$         | 13) $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ | 14) $x^n \ln x$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) |                       |
| 15) $e^{ax} \cos(ax)$ ( $(a, \alpha) \in (\mathbb{R}^*)^2$ ) | 16) $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$ | 17) $x^2 e^x \sin x$       | 18) $\sqrt{1-x^2}$                     |                       |

**Exercice n° 3. (T)** (primitives de fonctions du type  $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$ )

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- 1)  $\frac{1}{2x^2+5x+2}$    2)  $\frac{1}{4x^2-4x+1}$    3)  $\frac{1}{x^2+2x+2}$    4)  $\frac{1}{x^2+x+1}$    5)  $\frac{1}{x^2-2x \cos \theta + 1}$ ,  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice n° 4. (T)** (fractions rationnelles en sinus, cosinus et tangente)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- 1)  $\frac{1}{\sin x}$    2)  $\frac{1}{\cos x}$    3)  $\frac{1}{\tan x}$    4)  $\frac{1}{2+\sin^2 x}$   
 5)  $\frac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)}$    6)  $\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

**Exercice n° 5. (I)**

On pose  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$  et  $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ . Calculer I et J.

**Exercice n° 6. (T)** (ch, sh et th ...)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- 1)  $\frac{1}{\text{ch } x}$    2)  $\frac{1}{\text{sh } x}$    3)  $\frac{1}{\text{th } x}$    4)  $\text{ch}^3 x$   
 5)  $\text{ch}^4 x$    6)  $\frac{\text{ch}^3 x}{1+\text{sh } x}$    7)  $\sqrt{\text{ch } x - 1}$    8)  $\frac{\text{th } x}{1+\text{ch } x}$   
 9)  $\frac{1}{1-\text{ch } x}$

**Exercice n° 7. (T)** (avec des racines)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$  (transformation canonique).
- 2)  $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$  (quantité conjuguée puis poser  $u = \sqrt{1+x}$  et  $v = \sqrt{1-x}$ ).
- 3)  $\frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$  (poser  $u = x^6$  et  $v = \sqrt{1+u}$ ).

**Exercice n° 8. (I)**

Calculer les intégrales suivantes ( $a, b$  réels donnés,  $p$  et  $q$  entiers naturels donnés)

- 1)  $\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2+1} dx$  ( $a > 0$ )
- 2)  $\int_0^\pi 2 \cos(px) \cos(qx) dx$  et  $\int_0^\pi 2 \cos(px) \sin(qx) dx$  et  $\int_0^\pi 2 \sin(px) \sin(qx) dx$  ( $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ).
- 3)  $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$
- 4)  $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x| + |x+1| + |x+2|) dx$
- 5)  $\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{Arctan } x dx$
- 6)  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

**Exercice n° 9.**

Calculer  $f(x) = \int_0^1 \text{Max}(x, t) dt$ . Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

**Exercice n° 10. (I)** (Intégrales de WALLIS)

Pour  $n$  entier naturel, on pose  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ .

- 1) Calculer  $W_0$  et  $W_1$ .
- 2) Déterminer une relation entre  $W_n$  et  $W_{n+2}$ .
- 3) En déduire  $W_{2n}$  et  $W_{2n+1}$  en fonction de  $n$ .

**Exercice n° 11. (I)**

Pour  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ .

- 1) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ . Trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ . En déduire  $I_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) Montrer que  $I_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et en déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$