

Planche n° 15. Calculs de primitives et d'intégrales : corrigé

Exercice n° 1.

1) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$,

$$3x^3 - 7x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{4}{(\sqrt[4]{x})^7} + \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{4x^4} = 3x^3 - 7x^{4/3} + 3x^{1/2} - \frac{1}{x} - 4x^{-7/4} + 2x^{-3/2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{4x^4},$$

et donc les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction considérée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{3x^4}{4} - \frac{7x^{7/3}}{7/3} + \frac{3x^{3/2}}{3/2} - \ln x - \frac{4x^{-3/4}}{-3/4} + \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{12x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$x \mapsto \frac{3x^4}{4} - 3x^2\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{x} - \ln x + \frac{16}{3(\sqrt[4]{x})^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{12x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Pour tout réel x , $(x-1)e^{x^2-2x} = \frac{1}{2}(2x-2)e^{x^2-2x}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto (x-1)e^{x^2-2x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Soit I un intervalle sur lequel $x^2 - 1$ ne s'annule pas.

Pour tout réel x de I , $\frac{x}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2-1)^3}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^3}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{4(x^2-1)^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

4) Soit I un intervalle sur lequel $x^3 + 9x - 5$ est positif.

Pour tout réel x de I , $(x^2+3)\sqrt{x^3+9x-5} = \frac{1}{3}(3x^2+9)(x^3+9x-5)^{1/2}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x \mapsto (x^2+3)\sqrt{x^3+9x-5}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3} \frac{(x^3+9x-5)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+9x-5)^{3/2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5) Pour tout réel x , $\frac{2x+1}{(\sqrt[3]{x^2+x+1})^2} = (2x+1)(x^2+x+1)^{-2/3}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction

$x \mapsto \frac{2x+1}{(\sqrt[3]{x^2+x+1})^2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{1/3}(x^2+x+1)^{1/3} + C = 3\sqrt[3]{x^2+x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

6) Pour tout réel x de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ et donc les primitives sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \text{Arcsin}(2x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

7) Pour tout réel x , $\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1+(2x)^2}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Arctan}(2x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

8) Pour tout réel x , $\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{2^2+x^2}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{4+x^2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

9) Pour tout réel x , $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ sont

les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}/2} \text{Arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$, ou encore les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

10) I est l'un des deux intervalles]0, 1[ou]1, +∞[. Pour tout réel x de I, $\frac{1}{x \ln x} = \frac{1/x}{\ln x}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln |\ln(x)| + C, C \in \mathbb{R}$.

11) Pour tout réel x de \mathbb{R} , $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$ et donc les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(1+e^x) + C, C \in \mathbb{R}$.

12) I désigne un intervalle sur lequel $x - \sin x$ ne s'annule pas. Pour tout réel de I, $\frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos x}{x - \sin x}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \ln |x - \sin x| + C, C \in \mathbb{R}$.

13) I désigne un intervalle sur lequel $x - \sin x$ ne s'annule pas. Pour tout réel de I, $\frac{\sin^2(x/2)}{(x - \sin x)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^3}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(x/2)}{(x - \sin x)^3}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{4(x - \sin x)^2}, C \in \mathbb{R}$.

$$14) \int \left(\frac{x}{e} \right)^x \ln x \, dx = \int (x \ln x - x)' e^{x \ln x - x} \, dx = e^{x \ln x - x} + C = \left(\frac{x}{e} \right)^x, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 2.

$$1) \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$2) \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$3) \int \ln(x+1) \, dx = (x+1) \ln(x+1) - \int (x+1) \times \frac{1}{x+1} \, dx = (x+1) \ln(x+1) - \int 1 \, dx = (x+1) \ln(x+1) - x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$4) \int \operatorname{Arcsin} x \, dx = x \operatorname{Arcsin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$5) \int \operatorname{Arctan} x \, dx = x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$6) \int \operatorname{Arccos} x \, dx = x \operatorname{Arccos} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$7) \int x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1) e^{-x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

8)

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 1) e^x \, dx &= (x^2 - 3x + 1) e^x - \int (2x - 3) e^x \, dx = (x^2 - 3x + 1) e^x - (2x - 3) e^x + 2 \int e^x \, dx \\ &= (x^2 - 3x + 1) e^x - (2x - 3) e^x + 2e^x + C = (x^2 - 5x + 6) e^x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$9) \int (1-x) e^{-2x} \, dx = (1-x) \frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{2} (x-1) e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C = \frac{1}{4} (2x-1) e^{-2x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$10) \int \ln(1+x^2) \, dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctan} x + C, C \in \mathbb{R}.$$

11)

$$\begin{aligned} \int e^{\operatorname{Arccos} x} \, dx &= x e^{\operatorname{Arccos} x} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{Arccos} x} \, dx \\ &= x e^{\operatorname{Arccos} x} - \sqrt{1-x^2} e^{\operatorname{Arccos} x} + \int \sqrt{1-x^2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{Arccos} x} \, dx \end{aligned}$$

$$\text{et donc, } \int e^{\operatorname{Arccos} x} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{1-x^2} \right) e^{\operatorname{Arccos} x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

12)

$$\begin{aligned} \int \cos x \ln(1 + \cos x) \, dx &= \sin x \ln(1 + \cos x) - \int \sin x \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \, dx = \sin x \ln(1 + \cos x) - \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1} \, dx \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) - \int (\cos x - 1) \, dx = \sin x \ln(1 + \cos x) - \sin x + x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

13) $\frac{x}{(x+1)^2} e^x = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} e^x = \frac{1}{x+1} e^x - \frac{1}{(x+1)^2} e^x = \left(\frac{1}{x+1} e^x \right)'$ et donc $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} \, dx = \frac{e^x}{x+1} + C, C \in \mathbb{R}.$

14) $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

15) 1ère solution.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(\alpha x) \, dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(\alpha x) + \frac{\alpha}{a} \int e^{ax} \sin(\alpha x) \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(\alpha x) + \frac{\alpha}{a^2} e^{ax} \sin(\alpha x) - \frac{\alpha^2}{a^2} \int e^{ax} \cos(\alpha x) \, dx \end{aligned}$$

et donc $\left(1 + \frac{\alpha^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos(\alpha x) \, dx = \frac{1}{a^2} (a \cos(\alpha x) + \alpha \sin(\alpha x)) e^{ax} + C, C \in \mathbb{R}$ puis

$$\int e^{ax} \cos(\alpha x) \, dx = \frac{1}{a^2 + \alpha^2} (a \cos(\alpha x) + \alpha \sin(\alpha x)) e^{ax} + C, C \in \mathbb{R}.$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(\alpha x) \, dx &= \operatorname{Re} \left(\int e^{(a+i\alpha)x} \, dx \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha} \right) + C = \frac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2} \operatorname{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x))) + C \\ &= \frac{e^{ax}(a \cos(\alpha x) + \alpha \sin(\alpha x))}{a^2 + \alpha^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

16) $\int \sin(\ln x) \, dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) \, dx$ et donc

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C, C \in \mathbb{R}.$$

17) $\int x^2 e^x \sin x \, dx = \operatorname{Im} \left(\int x^2 e^{(1+i)x} \, dx \right)$. Or,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{(1+i)x} \, dx &= x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int x e^{(1+i)x} \, dx = x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} \left(x \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i} \int e^{(1+i)x} \, dx \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{1+i} - \frac{2x}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} \right) e^{(1+i)x} + C \\ &= \left(\frac{1-i}{2} x^2 + ix - \frac{1+i}{2} \right) e^{(1+i)x} + C \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 1 + i(-x^2 + 2x - 1)) (\cos x + i \sin x) e^x + C. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int x^2 e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} ((x^2 - 1) \cos x + (x^2 - 2x + 1) \sin x) e^x + C, C \in \mathbb{R}.$$

18) Sur $] - 1, 1[$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \, dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \text{Arcsin } x - \int \sqrt{1-x^2} \, dx.\end{aligned}$$

Les primitives sur $] - 1, 1[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \text{Arcsin } x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 3.

1) Soit I un intervalle ne contenant ni $-\frac{1}{2}$ ni -2 . Déterminons deux réels a et b tels que pour tout réel x de I ,

$$\frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{1}{2(x+2) \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x + \frac{1}{2}}.$$

Pour tout réel x de I ,

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x + \frac{1}{2}} = \frac{a}{x+2} + \frac{2b}{2x+1} = \frac{a(2x+1) + 2b(x+2)}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{2(a+b)x + (a+4b)}{2x^2 + 5x + 2}.$$

On choisit a et b tels que $2(a+b) = 0$ et $a+4b = 1$ c'est-à-dire $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. Pour tout x de I , on a

$$\frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \right).$$

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2 + 5x + 2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3} \left(\ln \left| x + \frac{1}{2} \right| - \ln |x+2| \right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Soit I un intervalle ne contenant pas $\frac{1}{2}$. Pour tout réel x de I ,

$$\frac{1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Pour tout réel x ,

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}.$$

Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \text{Arctan}(x+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x ,

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}/2} \text{Arctan} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C$, $C \in \mathbb{R}$

ou encore $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5) Pour tout réel x ,

$$\frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} = \frac{1}{(x - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}.$$

Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 4.

1) **1ère solution.** En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C, C \in \mathbb{R}.$$

2 **ème solution.** $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$. En posant $t = \cos x$ et donc $dt = -\sin x dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{-1}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} (\ln |t-1| - \ln |t+1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan^2 \frac{x}{2} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) **1ère solution.** On pose $t = \tan \frac{x}{2}$ et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln |1+t| - \ln |1-t| + C \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

2ème solution. En posant $t = \sin x$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \dots = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \dots$$

3ème solution. En posant $u = x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos \left(u - \frac{\pi}{2} \right)} du = \int \frac{1}{\sin u} du = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

3) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C, C \in \mathbb{R}$.

4) $\int \frac{1}{2 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x} + \tan^2 x} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{2(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{2 + 3 \tan^2 x} \times \frac{dx}{\cos^2 x}$.

En posant $u = \tan x$, on obtient

$$\int \frac{1}{2 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{2 + 3u^2} du = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} u \right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan x \right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

5)

$$\begin{aligned} \frac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)} dx &= \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{4 \sin x - 4 \sin^3 x} = \frac{1}{4} \times \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\sin x(1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{4} \times \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\sin x \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4 \cos x}{\sin x} - \frac{3}{\sin x \cos x} \right) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sin(2x)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)} dx = \ln |\sin x| - \frac{3}{4} \ln |\tan x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx &= \int \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)} dx = \int \frac{1}{2 - \sin^2 u} du \quad (\text{en posant } u = 2x) \\ &= \int \frac{1}{1 + \cos^2 u} du = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+v^2}} \frac{dv}{1+v^2} \quad (\text{en posant } v = \tan u) \\ &= \int \frac{dv}{v^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice n° 5.

Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x + \sin x \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\cos x = \sin x = 0$. Donc, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x + \sin x > 0$ et en particulier, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x + \sin x \neq 0$.

Ainsi, les deux fonctions $x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que les intégrales I et J existent.

$$I + J = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \text{et} \quad I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx = [\ln |\cos x + \sin x|]_0^{\pi/2} = 0. \quad \text{Donc}$$

$$I = J = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice n° 6.

1) En posant $t = e^x$ et donc $x = \ln t$ puis $dx = \frac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt = 2 \operatorname{Arctan}(e^x) + C,$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1} dx = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + C.$$

Remarque. Les deux fonctions $x \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ sont deux primitives sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Elles diffèrent donc d'une constante. Comme ces deux primitives prennent la même valeur en 0, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \operatorname{Arctan}(e^x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x).$$

2) En posant $t = e^x$ et donc $x = \ln t$ puis $dx = \frac{dt}{t}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx &= \int \frac{2}{t - \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

4) $\int \operatorname{ch}^3 x dx = \int (\operatorname{sh}^2 x + 1) \operatorname{ch} x dx = \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

5) Pour tout réel x , $\operatorname{ch}^4 x = \frac{1}{16} (e^x + e^{-x})^4 = \frac{1}{16} (e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x}) = \frac{1}{8} (\operatorname{ch}(4x) + 4 \operatorname{ch}(2x) + 3)$ et donc

$$\int \operatorname{ch}^4 x dx = \frac{1}{32} (\operatorname{sh}(4x) + 8 \operatorname{sh}(2x) + 12x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6)

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1 + \operatorname{sh} x} dx &= \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x dx \\ &= \int \frac{u^2 + 1}{u + 1} du \quad (\text{en posant } u = \operatorname{sh} x) \\ &= \int \frac{u^2 - 1 + 2}{u + 1} du \quad (\text{en posant } u = \operatorname{sh} x) \\ &= \int \left(u - 1 + \frac{2}{u + 1} \right) du = \frac{u^2}{2} - u + 2 \ln|u + 1| + C \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \operatorname{sh} x + 2 \ln|1 + \operatorname{sh} x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7) On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx &= \int \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} x - 1)(\operatorname{ch} x + 1)}}{\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}} dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}{\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}} dx = \operatorname{sgn}(x) \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}} dx \\ &= 2 \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} + C. \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x + 1} dx &= \int \frac{1}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} \operatorname{sh} x dx \\ &= \int \frac{1}{u(u + 1)} du \quad (\text{en posant } u = \operatorname{ch} x) \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du = \ln \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 - \operatorname{ch} x} dx &= \int \frac{1 + \operatorname{ch} x}{1 - \operatorname{ch}^2 x} dx = - \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx - \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx \\ &= \operatorname{coth} x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C. \end{aligned}$$

Exercice n° 7.1) En posant $u = x - 1$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \text{Arcsin } u + C = \text{Arcsin}(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{(1+x) - (1-x)} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u du + \int \frac{v}{1-v^2} 2v dv \right) \quad (\text{en posant } u = \sqrt{1+x} \text{ et } v = \sqrt{1-x}) \\ &= \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du + \int \frac{v^2-1+1}{1-v^2} dv \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \right) du + \int \left(-1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) \right) dv \\ &= u - v + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right) + C \\ &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} \right| + \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

3) On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6} x^5 dx = \frac{1}{6} \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{v}{v^2-1} 2v dv = \frac{1}{3} \int \frac{v^2}{v^2-1} dv = \frac{1}{3} \left(\int \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) \right) dv \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(v + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1} \right| \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice n° 8.1) On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{t}$ et $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. On obtient

$$I = \int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2+1} dx = - \int_a^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1} \frac{1}{t^2} dt = - \int_{1/a}^a \frac{\ln t}{t^2+1} dt = -I,$$

et donc, $I = 0$.2) $\cos(px) \cos(qx) = \frac{1}{2} (\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$ et donc,**Premier cas.** Si $p \neq q$,

$$\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q} \right]_0^\pi = 0.$$

Deuxième cas. Si $p = q \neq 0$,

$$\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2px)) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p = q = 0$. $\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \int_0^\pi dx = \pi$.

La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx = 0$ si $p \neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$ puis $\int_0^\pi \sin(px) \cos(qx) dx = 0$ pour tout choix de p et q .

3) La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+b)x + ab = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ où $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$.

Par suite, si $a \leq b$, $I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $I = -\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.

4) L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles rectangles isocèles. Ainsi, $I = \frac{1}{2}((1^2 + 3^2) + (2^2 + 2^2) + (3^2 + 1^2) + 4^2) = 22$.

5) On pose $u = \frac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arctan} x dx = \int_2^{1/2} (1 + u^2) \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{u}\right) \frac{-du}{u^2} = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u\right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) \right) - I. \end{aligned}$$

Par suite, $I = \frac{3\pi}{2} - I$ et donc $I = \frac{3\pi}{4}$.

7) En posant $x = \pi - u$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi - u) \sin(\pi - u)}{1 + \cos^2(\pi - u)} - du = \pi \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u} du - \int_0^\pi \frac{u \sin u}{1 + \cos^2 u} du \\ &= -\pi [\operatorname{Arctan}(\cos u)]_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I, \end{aligned}$$

et donc, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

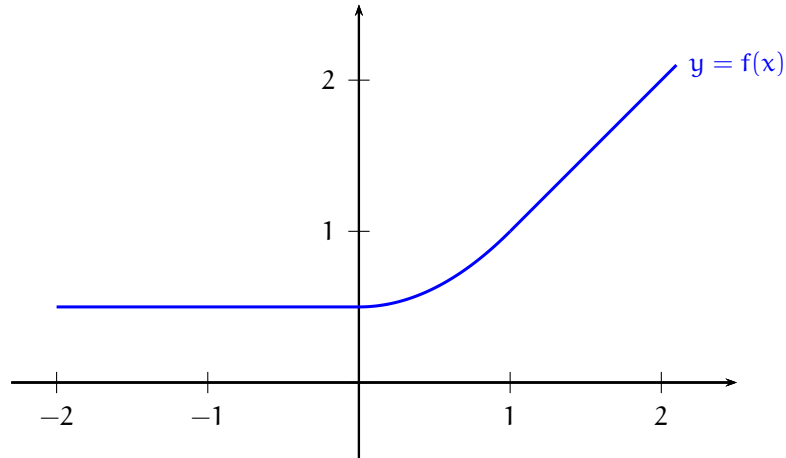
Exercice n° 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \operatorname{Max}(x, t) = \frac{1}{2}(x + t + |x - t|)$ est continue sur $[0, 1]$ en vertu de théorèmes généraux. Par suite, $\int_0^1 \operatorname{Max}(x, t) dt$ existe.

- Si $x \leq 0$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $x \leq t$ et donc $\operatorname{Max}(x, t) = t$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.
- Si $x \geq 1$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $t \leq x$ et donc $\operatorname{Max}(x, t) = x$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 x dt = x$.
- Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

$$\text{En résumé, } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 + x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Graphe de f.



Exercice n° 9.

1) $W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin^{n+1} x$ et $x \mapsto -\cos x$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx = [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n+1) \cos x \cos^n x \, dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx \quad (\sin^{n+1}(0) = 0 \text{ car } n+1 > 0) \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx \right) \\ &= (n+1) (W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

3) **1er cas.** Si n est un entier naturel non nul et pair, on peut poser $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 \\ &= \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times (2p-4) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p \times p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$ et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

2ème cas. Si n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3, on peut poser $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1 \\
 &= \frac{((2p) \times (2p-2) \times (2p-4) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.
 \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$ et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice n° 10.

1) $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{2k-2} + I_{2k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_{2k-2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_{2k} - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_{2k} = I_0 - (-1)^n I_{2n}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$.

De même, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

2) Soient $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq I_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x dx + \int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $0 < \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $0 \leq \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors $0 \leq I_n < \varepsilon$.

Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$